3. Найти безусловный экстремум функции

$$f(x)=2x_1^3+4x_1x_2^2-10x_1x_2+x_2^2.$$

Ответ: в точке $x^*=(1,1)^T$ - локальный минимум; в точке $x^*=(0,0)^T$ нет экстремума, так как не выполняются необходимые условия экстремума второго порядка.

4. Найти безусловный экстремум функции

$$f(x)=x_1^3-x_1x_2+x_2^2-2x_1+3x_2-4.$$

Ответ: в точке $x^*=(\frac{1}{2},-\frac{5}{4})^T$ - локальный минимум; в точке $x^*=(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3})^T$ нет экстремума, так как не выполняются необходимые условия экстремума второго порядка.

5. Найти безусловный экстремум функции $f(x)=(x_1-1)^4+(x_2-3)^2$.

Ответ: в точке $x^*=(1,3)^T$ выполняется необходимое условие экстремума второго порядка, т.е. $H(x^*)\geq 0$. Так как для любых $x\in R^2$ справедливо: $f(x^*)=0\leq f(x)$, то по определению 1.1 точка x^* является точкой глобального минимума.

6. Найти безусловный экстремум функции $f(x)=(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$.

Ответ: в точке $x^*=(1,1)^T$ - локальный минимум.

7. Проверить, является ли точка $x^*=(1,1)^T$ точкой безусловного минимума функции $f(x)=(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2+10(x_2-1)^2$.

Ответ: является.

8. Найти безусловный экстремум функции

$$f(x)=3x_1x_2-x_1x_2^2-x_1^2x_2.$$

Ответ: в точке $x^*=(1,1)^T$ - локальный максимум; в точке $x^*=(0,0)^T$ нет экстремума.

9. Проверить, являются ли точки $x^*=(0,0)^T, x^{**}=(1,1)^T$, $x^{***}=(-1,-1)^T$ точками безусловного минимума функции $f(x)=x_1^4+x_2^4-(x_1+x_2)^2$.

Ответ: в точке x^* нет минимума, а в точках x^{**} и x^{***} - локальный минимум.

10. Проверить, являются ли точки $x^*=(2,0,1)^T$ и $x^{**}=(0,0,0)^T$ точками экстремума функции $f(x)=x_1^2+5x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3-2x_1x_3$.

Ответ: в точке $x^{**}=(0,0,0)^T$ - локальный и одновременно глобальный минимум согласно п.1 утверждения 1.1, так как $H(x)>0$ и, следовательно, функция строго выпуклая и выпуклая. В точке $x^*=(2,0,1)^T$ нет экстремума, так как в ней не выполняются необходимые условия экстремума первого порядка.

§ 3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общая постановка задачи и основные положения изложены в § 1. Здесь мы рассмотрим случаи, когда множество допустимых решений X задается равенствами и неравенствами, т.е.

$$f(x^*)=\min_{x\in X} f(x);\quad f(x^*)=\max_{x\in X} f(x), \tag{3.1}$$

где $X=\left\{x \,\middle|\, \begin{array}{l} g_j(x)=0,\ j=1,\dots,m;\ m<n \\ g_j(x)\leq 0,\ j=m+1,\dots,p \end{array}\right\}$, m и p - числа; $f(x)$ - целевая функция, $g_j(x), j=1,\dots,p$ - функции, задающие ограничения (условия).

Будем считать функции $f(x)$; $g_j(x), j=1,\dots,p$ дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве R^n. Примерами рассматриваемых задач являются примеры 1.5-1.8. При $p=m$ задача (3.1) со *смешанными ограничениями* (см. далее разд. 3.4) преобразуется в задачу с *ограничениями типа равенств* (см. разд. 3.2), а при $m=0$ в задачу с *ограничениями типа неравенств* (см. разд. 3.3).

Определение 3.1. Функция

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\, g_j(x) \tag{3.2}$$

называется ***обобщенной функцией Лагранжа***, числа $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_p$ - ***множителями Лагранжа***, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$. ***Классической функцией Лагранжа*** называется функция

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\, g_j(x). \tag{3.3}$$

Определение 3.2. Градиентом обобщенной (классической) функции Лагранжа по x называется вектор-столбец, составленный из ее частных производных первого порядка по x_i, $i=1,\dots,n$:

$$\nabla_x L(x,\lambda_0,\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\left[\nabla_x L(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right].$$

Определение 3.3. *Вторым дифференциалом обобщенной (классической) функции Лагранжа* $L(x,\lambda_0,\lambda)$ $[L(x,\lambda)]$ называется функция

$$d^2L(x,\lambda_0,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i dx_j, \tag{3.5}$$

$$\left[d^2L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i dx_j\right].$$

Определение 3.4. *Первым дифференциалом ограничения* $g_j(x)$ называется функция

$$dg_j(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}dx_i,\quad j=1,\ldots,p. \tag{3.6}$$

Пример 3.1. Выписать функции (3.2) - (3.6) для задачи поиска условного экстремума функции $f(x)=x_1^2+x_2^2$ на множестве $X=\left\{x \mid x_2^2-x_1+3=0\right\}$ (см. пример 1.5), заданном ограничением $g_1(x)=x_2^2-x_1+3=0$.

□ Обобщенная функция Лагранжа: $L(x,\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0\left(x_1^2+x_2^2\right)+\lambda_1\left(x_2^2-x_1+3\right)$.

Классическая функция Лагранжа: $L(x,\lambda_1)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1\left(x_2^2-x_1+3\right)$.

Градиент функций Лагранжа:

$\nabla_x L(x,\lambda_0,\lambda_1)=\left(2\lambda_0x_1-\lambda_1;\,2\lambda_0x_2+2\lambda_1x_2\right)^T$; $\nabla_x L(x,\lambda_1)=\left(2x_1-\lambda_1;\,2x_2+2\lambda_1x_2\right)^T$.

Второй дифференциал функций Лагранжа:

$d^2L(x,\lambda_0,\lambda_1)=2\lambda_0\,dx_1^2+(2\lambda_0+2\lambda_1)\,dx_2^2$; $d^2L(x,\lambda_1)=2dx_1^2+(2+2\lambda_1)\,dx_2^2$.

Первый дифференциал ограничения: $dg_1(x)=-dx_1+2x_2dx_2$. ■

Пример 3.2. Выписать функции (3.2) - (3.6) для задачи поиска условного экстремума функции $f(x)=x_1^2$ на множестве $X=\left\{x \mid x_1+x_2=1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$.

□ Перепишем ограничения в каноническом виде (3.1):

$$g_1(x)=x_1+x_2-1=0,\qquad g_2(x)=-x_1\le 0,\qquad g_3(x)=-x_2\le 0.$$

Функции Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0x_1^2+\lambda_1(x_1+x_2-1)+\lambda_2(-x_1)+\lambda_3(-x_2);$$

$$L(x,\lambda)=x_1^2+\lambda_1(x_1+x_2-1)+\lambda_2(-x_1)+\lambda_3(-x_2).$$

Градиент функций Лагранжа:

$\nabla_x L(x,\lambda_0,\lambda)=\left(2\lambda_0x_1+\lambda_1-\lambda_2;\,\lambda_1-\lambda_3\right)^T$; $\nabla_x L(x,\lambda)=\left(2x_1+\lambda_1-\lambda_2;\,\lambda_1-\lambda_3\right)^T$.

Второй дифференциал функций Лагранжа:

$$d^2L(x,\lambda_0,\lambda_1)=2\lambda_0\,dx_1^2;\qquad d^2L(x,\lambda)=2dx_1^2.$$

Первый дифференциал ограничений:

$$dg_1(x)=dx_1+dx_2,\qquad dg_2(x)=-dx_1,\qquad dg_3(x)=-dx_2.$$ ■

Определение 3.5. Ограничение $g_j(x)\le 0$ называется *активным* в точке x^*, если $g_j(x^*)=0$. Если $g_j(x^*)<0$, то ограничение называется *пассивным*.

Пример 3.3. Классифицировать ограничение $g_j(x)=x_1+x_2-2\le 0$ в точках $x^*=(1,1)^T$, $\bar{x}=(0,0)^T$.

□ В точке x^* $g_j(x^*)=0$, т.е. неравенство превращается в равенство. Следовательно, ограничение является активным. В точке $\bar{x}$ справедливо $g_j(\bar{x})=-2<0$, поэтому ограничение в этой точке является пассивным. ■

Определение 3.6. Градиенты ограничений $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ являются *линейно независимыми* в точке x^*, если равенство $\lambda_1\nabla g_1(x^*)+\lambda_2\nabla g_2(x^*)+\ldots+\lambda_m\nabla g_m(x^*)=0$ выполняется только при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$. Если существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ одновременно не равные нулю, для которых равенство выполняется, то градиенты *линейно зависимы.* В этом случае один из них есть линейная комбинация остальных. Один вектор $\nabla g_1(x^*)$ тоже образует систему векторов: при $\nabla g_1(x^*)\ne 0$ линейно независимую, а при $\nabla g_1(x^*)=0$ линейно зависимую.

Система векторов, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима. Если $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\left(\nabla g_1(x^*)\nabla g_2(x^*)\ldots\nabla g_m(x^*)\right)=m$, то система векторов линейно независима. Если $\operatorname{rang} A<m$, то система линейно зависима.

Пример 3.4. Исследовать градиенты активных ограничений в точках $x^*=(1,0)^T$, $\bar{x}=(0,0)^T$ для $g_1(x)=-x_1\le 0$, $g_2(x)=-x_2\le 0$, $g_3(x)=x_2-(1-x_1)^3\le 0$.

□ Найдем градиенты:

$$\nabla g_1(x)=(-1,0)^T;\quad \nabla g_2(x)=(0,-1)^T;\quad \nabla g_3(x)=\left(3(1-x_1)^2,1\right)^T.$$

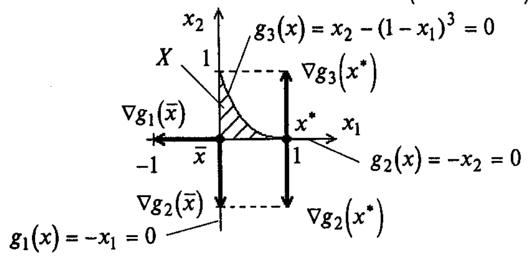

Рис. 3.1

В точке $x^*=(1,0)^T$ активны второе и третье ограничения: $g_2(x^*)=g_3(x^*)=0$; $\nabla g_2(x^*)=(0,-1)^T$; $\nabla g_3(x^*)=(0,1)^T$. Так как $\operatorname{rang}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=1<2$, то градиенты второго и третьего ограничений линейно зависимы. Действительно, $\lambda_2(0,-1)^T+\lambda_3(0,1)^T=0$, например, при $\lambda_2=1,\lambda_3=1$. В точке $\bar{x}=(0,0)^T$ активны первое и второе ограничения: $g_1(\bar{x})=g_2(\bar{x})=0$; $\nabla g_1(\bar{x})=(-1,0)^T$; $\nabla g_2(\bar{x})=(0,-1)^T$. Так как $\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2=m$, то градиенты линейно независимы (рис. 3.1). ■

3.2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА РАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1,\dots,x_n) = 0,\ j = 1,\dots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \tag{3.7}$$

где $X = \left\{ x \mid g_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,m;\ m < n \right\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локальных экстремумов с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа равенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f(x^*)$ функции в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 3.1 (необходимые условия экстремума первого порядка).
Пусть x^* есть точка локального экстремума в задаче (3.7). *Тогда найдутся числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:*

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n; \tag{3.8 а}$$

- условие допустимости решения:

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = 1,\dots,m. \tag{3.8 б}$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1(x^*),\dots,\nabla g_m(x^*)$ в точке x^* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Замечания 3.1.

1. Условие (3.8 а) можно записать в векторной форме: $\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$.

2. Система (3.8) содержит $n+m$ уравнений с $n+m+1$ неизвестными λ_0^*, $\lambda^* = (\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)^T$, $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)^T$. Точки x^*, удовлетворяющие системе при некоторых λ_0^*, λ^*, называются *условно-стационарными*.

3. При решении задач проверка условия регулярности затруднена, так как точка x^* заранее не известна. Поэтому, как правило, рассматриваются два случая: $\lambda_0^* = 0$ и $\lambda_0^* \neq 0$. Если $\lambda_0^* \neq 0$, в системе (3.8 а) полагают $\lambda_0^* = 1$. Это эквивалентно делению системы уравнений (3.8 а) на λ_0^* и замене $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*. При этом обобщенная функция Лагранжа становится классической, а сама система (3.8) имеет вид

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n; \tag{3.9 а}$$

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = 1,\dots,m. \tag{3.9 б}$$

Здесь число уравнений равно числу неизвестных.

4. Система (3.9) отражает тот факт, что антиградиент целевой функции в регулярной точке экстремума x^* является линейной комбинацией градиентов ограничений. Действительно, с учетом (3.3) можно переписать условие (3.9 а) в форме

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = 0.$$

Отсюда

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*). \tag{3.10}$$

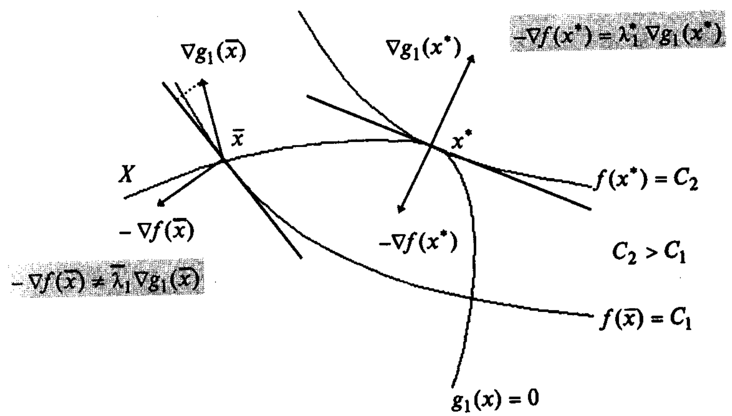

Рис. 3.2

Точка x^* условного экстремума (максимума) является точкой касания линии уровня целевой функции и кривой, описывающей ограничение (рис. 3.2). В точке $\bar{x}$ возможно движение вдоль ограничения, связанное с увеличением функции.

5. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.8) при $\lambda_0^* \neq 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ - *нерегулярной*. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений. При этом в обобщенной функции Лагранжа исчезает член, содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях экстремума не используется информация, представляемая градиентом целевой функции.

6. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (3.7), включено в (3.8),(3.9) для удобства формирования алгоритма решения задачи.

Утверждение 3.2 (необходимые условия экстремума второго порядка).

Пусть x^* *- регулярная точка минимума (максимума) в задаче* (3.7) *и имеется решение* (x^*, λ^*) *системы* (3.9). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^*, λ^*), *неотрицателен (неположителен)*:

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad \left(d^2 L(x^*, \lambda^*) \leq 0\right) \tag{3.11}$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.12}$$

Утверждение 3.3 (достаточные условия экстремума).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), *удовлетворяющая системе* (3.9). *Если в этой точке* $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$ $\left(d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0\right)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (3.7).

Замечание 3.2. Достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка проверяются в условно-стационарных точках, которые удовлетворяют системе (3.8) при $\lambda_0^* \neq 0$ или системе (3.9), так как для практики безусловно представляет интерес случай, когда в функции Лагранжа присутствует целевая функция, экстремум которой ищется.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$

б) $g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (при этом поделить условие "а" на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \neq 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума).

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*, λ^*):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j;$$

б) записать систему (3.12) в точке x^*:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, m;$$

в) из предыдущей системы выразить любые m дифференциалов dx_i через остальные $(n - m)$ и подставить в $d^2 L(x^*, \lambda^*)$;

г) если $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$ при ненулевых dx, то в точке x^* - условный локальный минимум. Если $d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0$ при ненулевых dx, то в точке x^* - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (см. утверждение 3.2), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (3.7) приведены в табл. 3.1.

Замечания 3.3.

1. Иногда удается проверить условие линейной независимости градиентов ограничений на множестве X (см. определение 3.6.). Если оно выполняется, то на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа (3.3), на шаге 2 можно записывать сразу систему (3.9), а на шаге 3 отсутствует случай $\lambda_0^* = 0$.

2. Графическое решение задачи (при $n = 2, m = 1$) базируется на п. 4 замечаний 3.1. Для этого следует:

а) построить множество допустимых решений X;

б) построить семейство линий уровня целевой функции и найти точки их касания с кривыми, описывающими ограничения. Эти точки являются "подозрительными" на условный экстремум;

в) исследовать поведение целевой функции при движении вдоль ограничения к исследуемой точке и от нее. Классифицировать точки, используя определение экстремума (см. определения 1.1 и 1.2).

Необходимые и достаточные условия в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа равенств

Таблица 3.1

№ п/п	$\nabla_x L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)$	$g_j(x^*)$, $j=1,\ldots,m$	$\lambda_0^* \ne 0$, $d^2L(x^*,\lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j=1,\ldots,m$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	0	0	>0	$0,\ dx \ne 0$	Условный локальный минимум
2	0	0	<0	$0,\ dx \ne 0$	Условный локальный максимум
3	0	0	≥ 0	0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	0	0	≤ 0	0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	0	0	$=0$	0	Требуется дополнительное исследование
6	0	0	$\gtrless 0$	0	Нет экстремума

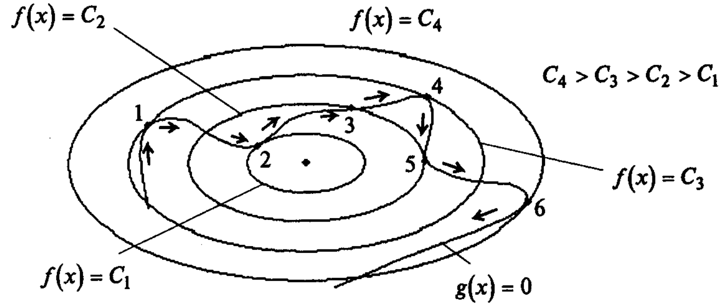

Рис. 3.3

На рис. 3.3 в точках 1 - 6 линии уровня касаются ограничения. Исследование поведения функции в этих точках при движении по стрелкам показывает, что в точках 1, 4, 6 - локальный максимум, так как при приближении к ним функция возрастает, а затем убывает; в точках 2, 5 - локальный минимум, так как при приближении к ним функция убывает, а затем возрастает; в точке 3 нет условного экстремума, так как при приближении к ней и удалении дальше от нее функция возрастает.

3. При решении примеров для упрощения записи на шагах 2 и 3 алгоритма будем опускать знак $*$, оставляя его только для значений x и λ, соответствующих условно-стационарным точкам.

Пример 3.5. Найти экстремум функции $f(x)=x_1^2+x_2^2$ на множестве $X=\{x\,|\,x_1+x_2-2=0\}$: $f(x)=x_1^2+x_2^2 \to \text{extr}$, $g_1(x)=x_1+x_2-2=0$.

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x)=(1,1)^T \ne 0$, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа (3.3).

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_1)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1(x_1+x_2-2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1=0 \Rightarrow x_1=-\dfrac{\lambda_1}{2}$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_1=0 \Rightarrow x_2=-\dfrac{\lambda_1}{2}$;

б) $g_1(x)=x_1+x_2-2=0$.

3. Решение системы: $x_1^*=x_2^*=1,\ \lambda_1^*=-2$ - условно-стационарная точка.

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*)=2dx_1^2+2dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2}=\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2}=2$,

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1}=0;$$

б) $dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0$, так как $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 1$;

в) выразим дифференциал dx_1 через dx_2: $dx_1 = -dx_2$ и подставим в d^2L;

г) так как $d^2L(x^*, \lambda_1^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке $x^* = (1,1)^T$ - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1). Графическое решение задачи приведено на рис. 1.7.

5. Подсчитаем значение функции в точке условного экстремума: $f(x^*) = 2$.■

Пример 3.6. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.$$

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2)^T \neq 0$ для всех $x \in X$, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$,

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.

3. Решением системы являются две условно-стационарные точки:

A: $x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = -\dfrac{1}{2}$; $\quad B$: $x_1^* = -1,\ x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = \dfrac{1}{2}$.

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*, \lambda_1^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1^*$,

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б) $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$, так как $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 2x_1$, $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 2x_2$;

в) исследуем точку A. Получаем $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. С учетом полученного соотношения $d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -2dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x^* = (1,1)^T$ - регулярный условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку B. Получаем $dg_1(B) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. С учетом полученного соотношения $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$.

Поэтому в точке $x^* = (-1,-1)^T$ - регулярный условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

5. Подсчитаем значения функции в точках экстремума: $f(A) = 2, f(B) = -2$. Графическое решение задачи соответствует п. 2 замечаний 3.3 и изображено на рис. 3.4. ■

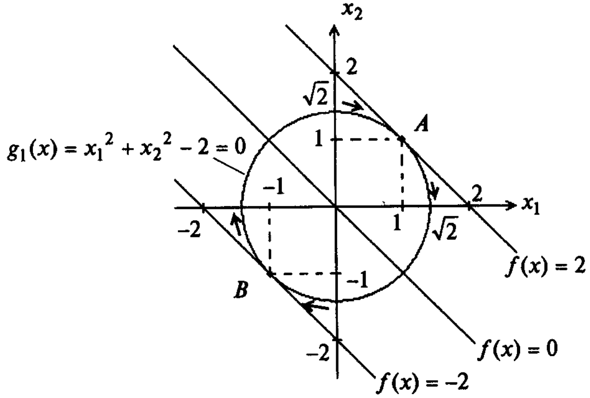

Рис. 3.4

Пример 3.7. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_2^2 - x_1^3 = 0.$$

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = (-3x_1^2, 2x_2)^T = 0$ в точке $x^* = (0,0)^T$, то условие не выполняется (см. определение 3.6). Будем пользоваться алгоритмом с использованием обобщенной функции Лагранжа.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1 (x_2^2 - x_1^3).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_2^2 - x_1^3 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$, так как в утверждении 3.1 все множители Лагранжа не могут быть одновременно равны нулю. Отсюда $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_0^* = 0$.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения приведенной в п.2 системы на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0; \quad 2\lambda_1 x_2 = 0;$$

$$x_2^2 - x_1^3 = 0.$$

Рассмотрим второе уравнение. Если $\lambda_1 = 0$, то система несовместна. Если $x_2 = 0$, то $x_1 = 0$ и система тоже несовместна. Как видно, применение классической функции Лагранжа не дает результата.

4. Так как $\lambda_0^* = 0$, достаточные условия экстремума не проверяются. Точка x^* со значением целевой функции $f(x^*) = 0$ является точкой нерегулярного локального и глобального минимума, как следует из рис. 3.5. ■

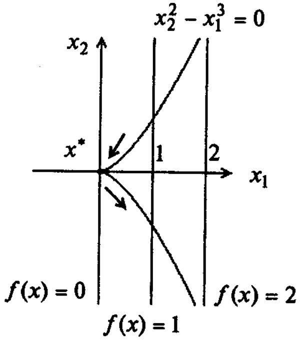

Рис. 3.5

Пример 3.8. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

□ Будем следовать алгоритму, не проверяя условие регулярности.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda_1 \left[(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4\right].$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 (x_1 - 1) = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Из п.2 следует:

$$2\lambda_1 (x_1 - 1) = 0, \quad 2\lambda_1 x_2 = 0,$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Так как согласно утверждению 3.1 $\lambda_1 \neq 0$, то из первых двух уравнений: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Однако при этом ограничение не выполняется: $g_1(x) = -4 \neq 0$. Следовательно, система несовместна.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Перепишем систему, приведенную в п.2, поделив уравнения на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 (x_1 - 1) = 0; \qquad \frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 (1 + \lambda_1) = 0; \tag{3.13}$$

$$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Рассмотрим второе уравнение. Если $x_2 = 0$, то из третьего уравнения следует $x_1 = 3$, $x_1 = -1$, а из первого $\lambda_1 = -\dfrac{3}{2}$, $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ соответственно. Если $\lambda_1 = -1$, то первое уравнение имеет вид $2 = 0$, т.е. система несовместна. Таким образом, найдены две условно-стационарные точки:

$$A\text{: } x_1^* = 3,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = -\frac{3}{2}; \qquad B\text{: } x_1^* = -1,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = -\frac{1}{2}.$$

4. Проверим достаточные условия экстремума, используя (3.13):

а) $d^2 L(x^*, \lambda_1^*) = 2(1 + \lambda_1^*) dx_1^2 + 2(1 + \lambda_1^*) dx_2^2$;

б) $dg_1(x^*) = 2(x_1^* - 1) dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$;

в,г) исследуем точку A : $dg_1(A) = 4dx_1 + 0 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2 L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке A - регулярный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку B : $dg_1(B) = -4dx_1 + 0 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2 L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке B - регулярный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

5. Подсчитаем значения функции в точках экстремума: $f(A) = 9, f(B) = 1$. Графическое решение задачи изображено на рис. 3.6 (см. п. 2 замечаний 3.3). ■

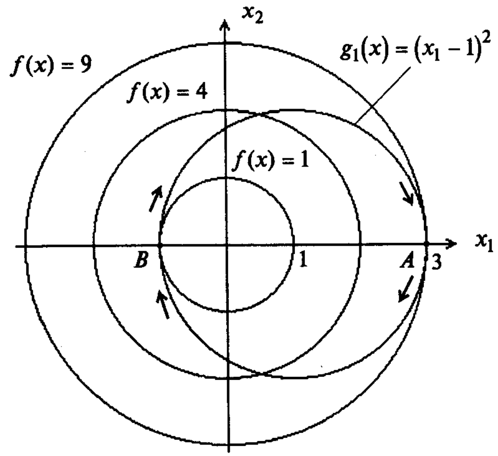

Рис. 3.6

Пример 3.9. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0\left(x_1^2 - x_2^2\right) + \lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right).$$

2. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$ в силу утверждения 3.1. Поэтому из первых двух уравнений следует: $x_1 = x_2 = 0$. Однако условие "б" при этом не выполняется. Следовательно, система несовместна.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Перепишем систему, приведенную в п.2, поделив уравнения на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1(1+\lambda_1) = 0, \qquad \frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2(-1+\lambda_1) = 0;$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \tag{3.14}$$

Пусть $\lambda_1 = -1$. Тогда $x_2 = 0$, а $x_1 = \pm 1$. Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда $x_1 = 0$, а $x_2 = \pm 1$. Других решений система не имеет. Таким образом, имеем четыре условно-стационарные точки:

A: $x_1^* = 1,\ \ x_2^* = 0,\ \ \lambda_1^* = -1$; $\qquad B$: $x_1^* = -1,\ \ x_2^* = 0,\ \ \lambda_1^* = -1$;

C: $x_1^* = 0,\ \ x_2^* = 1,\ \ \lambda_1^* = 1$; $\qquad D$: $x_1^* = 0,\ \ x_2^* = -1,\ \ \lambda_1^* = 1$.

4. Проверим достаточные условия экстремума. Воспользуемся системой (3.14):

а) $d^2L(x^*, \lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(\lambda_1^* - 1)dx_2^2$;

б) $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$;

в,г) исследуем точку A : $dg_1(A) = 2dx_1 = 0$, откуда получаем $dx_1 = 0$ и $d^2L(A) = -4dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке A - регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку B: $dg_1(B) = -2dx_1 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2L(B) = -4dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке B - регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку C : $dg_1(C) = 2dx_2 = 0$, откуда $dx_2 = 0$ и $d^2L(C) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке C - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

Исследуем точку D : $dg_1(D) = -2dx_2 = 0$, откуда $dx_2 = 0$ и $d^2L(D) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке D - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

5. Вычислим значения функции в точках условного экстремума: $f(A) = f(B) = 1$; $f(C) = f(D) = -1$. Графическое решение приведено на рис. 3.7. ■

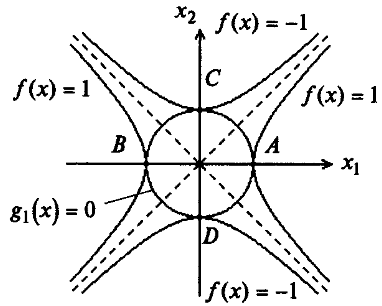

Рис. 3.7

Пример 3.10. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_0\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - x_3\right) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 4).$$

2. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0$,

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$,

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3} = 2\lambda_0 x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$, $g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда из п.2 следует:

$$2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

4 — 4751

Первые два уравнения системы перепишутся в виде

$$\lambda_1(2x_1+1)=0,$$
$$\lambda_1(2x_2+1)=0.$$

Если $\lambda_1=0$, то $\lambda_2=0$, что противоречит требованиям утверждения 3.1. Если $\lambda_1\neq 0$, то $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$. Из двух последних уравнений получаем $x_3=\frac{1}{2}$ и $x_3=4-x_1-x_2=5$, т.е. имеется противоречие, а система несовместна.

Во втором случае $\lambda_0\neq 0$. Перепишем систему, приведенную в п.2, поделив уравнения на λ_0 с заменой $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_1, λ_2:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1}=2x_1(1+\lambda_1)+\lambda_2=0,$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2}=2x_2(1+\lambda_1)+\lambda_2=0,$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3}=2x_3-\lambda_1+\lambda_2=0;$$

$$g_1(x)=x_1^2+x_2^2-x_3=0,$$

$$g_2(x)=x_1+x_2+x_3-4=0.$$

Из первых трех уравнений имеем:

$$x_1=x_2=-\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)};\quad x_3=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}.$$

Подставляя полученные соотношения в последние два уравнения и решая их, получаем:

$$\lambda_1=\frac{2}{3};\quad \lambda_2=-\frac{10}{3};$$
$$\lambda_1=-\frac{20}{3};\quad \lambda_2=-\frac{68}{3}.$$

Таким образом, получены две условно-стационарные точки:

$$A\colon\ x_1^*=1,\quad x_2^*=1,\quad x_3^*=2,\quad \lambda_1^*=\frac{2}{3},\quad \lambda_2^*=-\frac{10}{3};$$

$$B\colon\ x_1^*=-2,\quad x_2^*=-2,\quad x_3^*=8,\quad \lambda_1^*=-\frac{20}{3},\quad \lambda_2^*=-\frac{68}{3}.$$

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)=2(1+\lambda_1^*)dx_1^2+2(1+\lambda_1^*)dx_2^2+2dx_3^2$;

б) $dg_1(x^*)=2x_1^*\,dx_1+2x_2^*\,dx_2-dx_3=0,\quad dg_2(x^*)=dx_1+dx_2+dx_3=0$;

в) выразим дифференциалы dx_1 и dx_3 через dx_2:

$$dx_1=-\frac{1+2x_2^*}{1+2x_1^*}dx_2,\qquad dx_3=-\frac{2(x_1^*-x_2^*)}{1+2x_1^*}dx_2;$$

г) исследуем точку A: $dx_1=-dx_2,\ dx_3=0$,

$$d^2L(A)=2\left(1+\frac{2}{3}\right)(-dx_2)^2+2\left(1+\frac{2}{3}\right)dx_2^2>0\ \text{ при } dx_2\neq 0.$$

Поэтому в точке A - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

Исследуем точку B: $dx_1=-dx_2, dx_3=0$,

$$d^2L(B)=2\left(1-\frac{20}{3}\right)(-dx_2)^2+2\left(1-\frac{20}{3}\right)dx_2^2<0\ \text{ при } dx_2\neq 0.$$

Поэтому в точке B - регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

5. Значения функции в точках экстремума: $f(A)=6$, $f(B)=72$. ■

Пример 3.11. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2+x_2^2\right]\to \text{extr},$$
$$g_1(x)=-x_1+\alpha\,x_2^2=0$$

при различных $\alpha>0$.

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x)=(-1,\ 2\alpha\,x_2)^T\neq 0$ ни в одной точке множества X, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому воспользуемся классической функцией Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_1)=\frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2+x_2^2\right]+\lambda_1\left(-x_1+\alpha\,x_2^2\right).$$

2. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1}=x_1-1-\lambda_1=0,\quad \frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2}=x_2+2\alpha\,\lambda_1 x_2=0;$

б) $g_1(x)=-x_1+\alpha\,x_2^2=0$.

3. Из второго уравнения следует $x_2(1+2\alpha\,\lambda_1)=0$. Если $x_2=0$, то $x_1=0$, а $\lambda_1=-1$. Если $\lambda_1=-\frac{1}{2\alpha}$, то $x_1=1+\lambda_1=1-\frac{1}{2\alpha}=\frac{2\alpha-1}{2\alpha}$ и при этом $x_2=\pm\sqrt{\frac{2\alpha-1}{2\alpha^2}}$.

При $0<\alpha<\frac{1}{2}$ решение не существует. Таким образом, имеются три условно-стационарные точки (рис. 3.8):

$$A\colon\ x_1^*=0,\ x_2^*=0,\ \lambda_1^*=-1;$$

$$B\colon\ x_1^*=\frac{2\alpha-1}{2\alpha},\quad x_2^*=\sqrt{\frac{2\alpha-1}{2\alpha^2}},\quad \lambda_1^*=-\frac{1}{2\alpha};$$

$$C\colon\ x_1^*=\frac{2\alpha-1}{2\alpha},\quad x_2^*=-\sqrt{\frac{2\alpha-1}{2\alpha^2}},\quad \lambda_1^*=-\frac{1}{2\alpha}.$$

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*)=dx_1^2+(1+2\alpha\lambda_1^*)dx_2^2$;

б) $dg_1(x^*)=-dx_1+2\alpha\,x_2^*\,dx_2=0$;

в) выразим из п."б" dx_1: $dx_1 = 2\alpha\, x_2^* \, dx_2$;

г) $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) = \left[\left(4\alpha\, x_2^*\right)^2 + \left(1 + 2\alpha\,\lambda_1^*\right)\right] dx_2^2$.

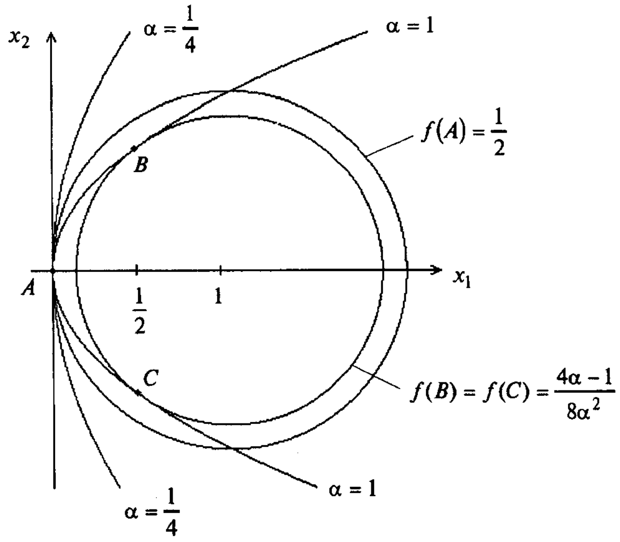

Рис. 3.8

Исследуем точку A: $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) = (1 - 2\alpha)\, dx_2^2$. При $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ получаем, что $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) > 0$ при $dx_2 \ne 0$ и в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.1). При $\alpha > \frac{1}{2}$ находим, что $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) < 0$ при $dx_2 \ne 0$ и в точке A - условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.1). При $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем, что $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) = 0$ при любых dx_2 и требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.1).

Для этого воспользуемся ***методом исключения переменных***. Выразим из уравнения ограничения одну из координат: $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2$. Подставим полученное выражение в целевую функцию: $f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} x_2^2 - 1\right)^2 + x_2^2\right] = \frac{1}{8} x_2^4 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2}$. Исследуем полученную функцию на безусловный экстремум, пользуясь п. 3 замечаний 2.2: $\frac{df}{dx_2} = \frac{1}{2} x_2^3 + x_2 = 0$. Отсюда $x_2^* = 0$ - стационарная точка. В этой

точке первая отличная от нуля производная $f^{(4)}\left(x^*\right) = 3 > 0$ - четная и положительная. Следовательно, в точке $x_2^* = 0$ - локальный минимум. С учетом связи $x_1^* = \frac{1}{2}\left(x_2^*\right)^2 = 0$ получаем, что в точке $x^* = (0,0)^T$ - условный локальный минимум.

Рассмотрим точки B и C: $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) = 16\alpha^2 \frac{2\alpha - 1}{2\alpha^2} dx_2^2 = 8(2\alpha - 1)\, dx_2^2$. При $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем $x_1^* = x_2^* = 0$ и $d^2L\left(x^*,\lambda_2\right) = 0$ при всех dx_2. Значит, требуется дополнительное исследование, которое уже было выполнено. При $\alpha > \frac{1}{2}$ имеем $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right) > 0$ при $dx_2 \ne 0$ и в точках B и C условный локальный минимум (строка 1 в таблице 3.1). Графическое решение приведено на рис. 3.8.

5. Значения функции в точках экстремума:

$$f(A) = \frac{1}{2}, \quad f(B) = f(C) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}\right] = \frac{1 + 4\alpha - 2}{8\alpha^2} = \frac{4\alpha - 1}{8\alpha^2}. \ ■$$

3.3. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1,\ldots,x_n) \le 0$, $j = 1,\ldots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f\left(x^*\right) = \min_{x \in X} f(x); \qquad f\left(x^*\right) = \max_{x \in X} f(x), \tag{3.15}$$

где $X = \left\{ x \mid g_j(x) \le 0,\ j = 1,\ldots,m \right\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локального экстремума с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа неравенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f\left(x^*\right)$ функции в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 3.4 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* - точка локального минимума (максимума) в задаче (3.15). *Тогда найдется такое число $\lambda_0^* \ge 0$ и вектор $\lambda^* = \left(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*\right)^T$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:*

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L\left(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i}=0, \quad i=1,\ldots,n\ ; \tag{3.16 а}$$

- условие допустимости решения:

$$g_j\left(x^*\right)\le 0, \quad j=1,\ldots,m; \tag{3.16 б}$$

- условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^* \ge 0, \quad j=1,\ldots,m \tag{3.16 в}$$

(*условие неположительности для условного максимума:* $\lambda_j^* \le 0$, $j=1,\ldots,m$);

- условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^*\, g_j\left(x^*\right)=0, \quad j=1,\ldots,m. \tag{3.16 г}$$

Если при этом градиенты активных в точке x^* ограничений линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \ne 0$.

Замечания 3.4.

1. Точки x^*, удовлетворяющие системе (3.16), называются *условно-стационарными.*

2. В отличие от случая ограничений типа равенств необходимые условия экстремума первого порядка формулируются отдельно для максимума и минимума. Утверждение 3.4 было доказано Ф. Джоном (F. John), а при $\lambda_0^* \ne 0$ Куном и Таккером (H.W. Kuhn, A.W. Tucker).

3. Если в решаемой задаче ограничения записаны в форме $g_j(x)\ge 0$, то их необходимо переписать в виде, используемом в (3.15): $-g_j(x)\le 0$.

4. Далее будем использовать *множество индексов ограничений, активных в точке x^**, которое обозначим через J_a.

5. При решении задач поиска условного максимума можно использовать необходимые и достаточные условия минимума, применяя преобразование, описанное в п.1 замечаний 1.1.

6. Так как точка x^* заранее неизвестна, то проверка условия регулярности затруднена, поэтому рекомендуется следовать алгоритму, описанному в п.3 замечания 3.1.

7. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.16) при $\lambda_0^* \ne 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ - *нерегулярной.* Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений.

8. Условие (3.16 а) в регулярной точке экстремума x^* отражает факт, что антиградиент целевой функции является неотрицательной (неположительной в случае максимума) линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения в точке x^*. Действительно, условие (3.16 а) с учетом (3.16 г) можно переписать в форме

$$-\nabla f\left(x^*\right)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\,\nabla g_j\left(x^*\right)=\sum_{j\in J_a}\lambda_j^*\,\nabla g_j\left(x^*\right).$$

На рис. 3.9 в точке x^* достигается минимум и выполняется приведенное равенство, а в точке $\bar{x}$ нет.

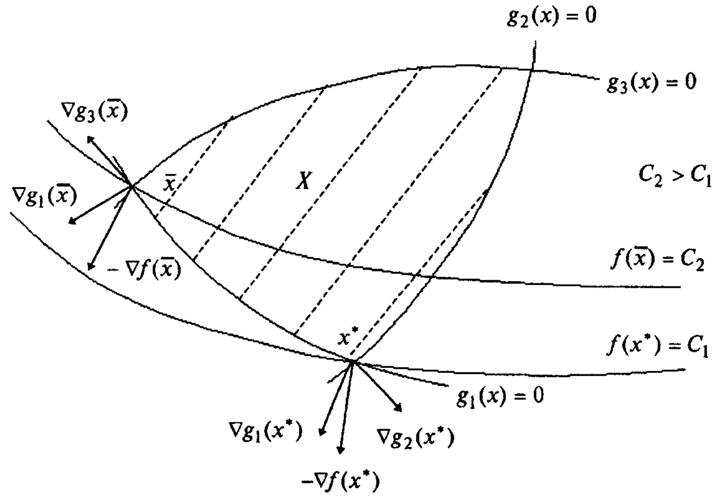

Рис. 3.9

9. При $\lambda_0^* \ne 0$ справедливы два важных утверждения:

1) если функции $f(x)$, $g_j(x)$, $j=1,\ldots,m$, выпуклые, то условия утверждения 3.4 являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума;

2) если функции "$-f(x)$", $g_j(x)$, $j=1,\ldots,m$, выпуклые, то условия теоремы 3.4 являются одновременно и достаточными условиями глобального максимума.

В обоих случаях множество допустимых решений X выпукло.

10. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (3.15), включено в (3.16) для удобства формирования алгоритма решения задачи.

11. Из условия дополняющей нежесткости следует, что если ограничение в точке x^* пассивное, т.е. $g_j(x^*)<0$, то $\lambda_j^*=0$, а если - активное, т.е. $g_j(x^*)=0$, то $\lambda_j^*\ge 0$ (для минимума) и $\lambda_j^*\le 0$ (для максимума).

Утверждение 3.5 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка (x^*,λ^*), *удовлетворяющая системе* (3.16) *при* $\lambda_0^* \ne 0$, *число активных ограничений в точке* x^* *совпадает с числом* n *переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если* $\lambda_j^* > 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* x^* *- точка условного локального минимума. Если* $\lambda_j^* < 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то* x^* *- точка условного локального максимума в задаче* (3.15).

Утверждение 3.6 (необходимое условие минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* *- регулярная точка минимума (максимума) в задаче* (3.15) *и имеется решение* (x^*,λ^*) *системы* (3.16). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^*,λ^*), *неотрицателен (неположителен):*

$$d^2L(x^*,\lambda^*) \ge 0 \qquad \left(d^2L(x^*,\lambda^*) \le 0\right) \tag{3.17}$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* > 0 \quad (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 3.7 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*,λ^*), *удовлетворяющая системе* (3.16) *при* $\lambda_0^* \ne 0$. *Если в этой точке* $d^2L(x^*,\lambda^*) > 0$ $\left(d^2L(x^*,\lambda^*) < 0\right)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* > 0 \quad (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (3.15).

З а м е ч а н и е 3.5. В рассматриваемой задаче замечания 3.2 и пп.1 и 3 замечаний 3.3 также справедливы с учетом замены (3.9) на (3.16).

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n;$

б) $g_j(x^*) \le 0, \quad j = 1,\dots,m;$

в) $\lambda_j^* \ge 0, \quad j = 1,\dots,m$ (для минимума), $\lambda_j^* \le 0, \quad j = 1,\dots,m$ (для максимума);

г) $\lambda_j^* \, g_j(x^*) = 0, \quad j = 1,\dots,m.$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \ne 0$ (при этом поделить условия, записанные на шаге 2, на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \ne 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^m вариантов удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l активных в точке x^* ограничений;

б) если $l = n$ и $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* - локальный минимум. Если $l = n$ и $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* - локальный максимум. Если $l < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*,λ^*):

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i dx_j;$$

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы активных ограничений:

$$\begin{aligned} dg_j(x^*) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j \in J_a; \quad \lambda_j^* > 0 \quad (\lambda_j^* < 0); \\ dg_j(x^*) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i \le 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0; \end{aligned} \tag{3.18}$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих системе (3.18). Если $d^2L(x^*,\lambda^*) > 0$, то в точке x^* -

Таблица 3.2

Необходимые и достаточные условия первого порядка в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа неравенств

№ п/п	Необходимые условия первого порядка: $\nabla_x L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)$; $\lambda_j^* g_j(x^*)$, $j=1,\dots,m$	$g_j(x^*)$, $j=1,\dots,m$	$\lambda_0^* \ge 0$, λ_j^*, $j=1,\dots,m$	Достаточные условия первого порядка ($\lambda_0^* \ne 0$): Число l активных ограничений	λ_j^*, $j \in J_a$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	Условный локальный минимум
2	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	Условный локальный максимум

Таблица 3.3

Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа неравенств

№ п/п	$d^2 L(x^*,\lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* > 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* = 0$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	> 0	$0,\ dx \ne 0$		≤ 0	Условный локальный минимум
2	< 0		$0,\ dx \ne 0$	≤ 0	Условный локальный максимум
3	≥ 0	0		≤ 0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	≤ 0		0	≤ 0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	$= 0$	0		≤ 0	Требуется дополнительное исследование
6	$= 0$		0	≤ 0	Требуется дополнительное исследование
7	$\gtrless 0$	0		≤ 0	Нет экстремума
8	$\gtrless 0$		0	≤ 0	Нет экстремума

условный локальный минимум. Если $d^2 L(x^*,\lambda^*) < 0$, то в точке x^* - условный локальный максимум.

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (утверждение 3.6), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (3.15) приведены в табл. 3.2, 3.3.

Пример 3.12. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия "а" следует, что $\lambda_1 = 0$. Это противоречит требованию утверждения 3.4 о существовании ненулевого вектора $(\lambda_0,\lambda)^T$.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим систему, приведенную в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1. Обобщенная функция Лагранжа при этом заменяется классической:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$.

Из условия "г" дополняющей нежесткости следует:

1) $\lambda_1 = 0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума). Тогда $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$ и условие "б" выполняется. Выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума (строки 1 и 2 в табл. 3.2).

2) $\lambda_1 \ne 0$. Тогда из системы

$$x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad 2x_1 + \lambda_1 = 0, \quad 2x_2 + \lambda_1 = 0$$

получаем: $x_1^* = x_2^* = 1$; $\lambda_1^* = -2$. Так как $\lambda_1^* < 0$, то необходимое условие минимума не выполняется (в точке $(1,1)^T$ нет минимума), но выполняется необходимое условие максимума. Таким образом, имеем две условно-стационарные точки.

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

В точке $x^* = (0,0)^T$ ограничение не является активным, так как $g_1(x^*) = -2 < 0$, поэтому достаточные условия первого порядка не удовлетворяются (строки 1 и 2 в табл. 3.2). Проверим условия второго порядка. Так как $d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $dx \neq 0$, то в точке $x^* = (0,0)^T$ регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.3), совпадающий в данной задаче с безусловным (рис. 3.10). С другой стороны, функция $f(x)$ выпуклая (см. пример 1.19) и множество X также выпуклое (см. определение 1.7 и пример 1.16). Поэтому в точке $x^* = (0,0)^T$ достигается глобальный условный минимум (п. 9 замечаний 3.4), а достаточные условия первого и второго порядка можно было и не проверять.

В точке $x^* = (1,1)^T$ ограничение является активным, но $l = 1 < n = 2$, поэтому достаточное условие первого порядка не выполняется. Проверим условие второго порядка. Имеем

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2,$$

$$dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0 \;\Rightarrow\; dx_1 = -dx_2.$$

Следовательно, $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Так как в этой точке $\lambda_1^* = -2 < 0$, то достаточное условие максимума не выполняется (строка 2 в табл. 3.3). Проверим необходимое условие максимума второго порядка. Так как $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 \geq 0$ при любых dx_2, то необходимое условие максимума не выполняется (строка 4 в табл. 3.3), поэтому в точке $x^* = (1,1)^T$ максимума нет.

5. Вычислим значение функции в точке условного минимума: $f(x^*) = 0$. ■

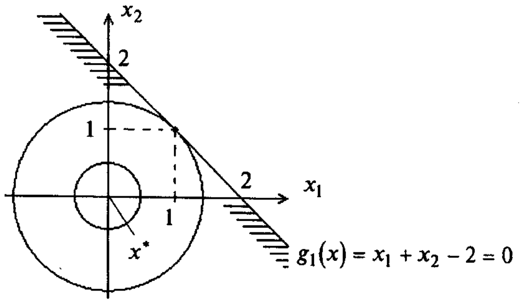

Рис. 3.10

Пример 3.13. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0(x_1 + x_2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 2x_1\lambda_1 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = \lambda_0 + 2x_2\lambda_1 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$;

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для минимума), $\lambda_1 \leq 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда согласно утверждению 3.4 требуется, чтобы $\lambda_1 \neq 0$. При этом $x_1 = x_2 = 0$ и не удовлетворяется условие "г" дополняющей нежесткости.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2x_1\lambda_1 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2x_2\lambda_1 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$;

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для минимума), $\lambda_1 \leq 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$.

Из условия "г" дополняющей нежесткости следуют два варианта:

1) $\lambda_1 = 0$. Тогда условие "а" не выполняется;

2) $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ и система имеет два решения (рис. 3.11):

точка A: $x_1^* = x_2^* = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_1^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (в точке A может быть минимум);

точка B: $x_1^* = x_2^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_1^* = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (в точке B может быть максимум).

4. Проверим достаточные условия экстремума. В точках A и B ограничения являются активными, но $l = 1 < n = 2$. Поэтому условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка:

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = 2\lambda_1^*\, dx_1^2 + 2\lambda_1^*\, dx_2^2,$$

$$dg_1(x^*) = 2x_1^*\, dx_1 + 2x_2^*\, dx_2 = 0.$$

В точках A и B выполняется $dx_1 = -dx_2$. Так как $d^2L(A) = 4\lambda_1^*\, dx_2^2 = 2\sqrt{2}\, dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке A - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.3). Так как $d^2L(B) = 4\lambda_1^*\, dx_2^2 = -2\sqrt{2}\, dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке B -

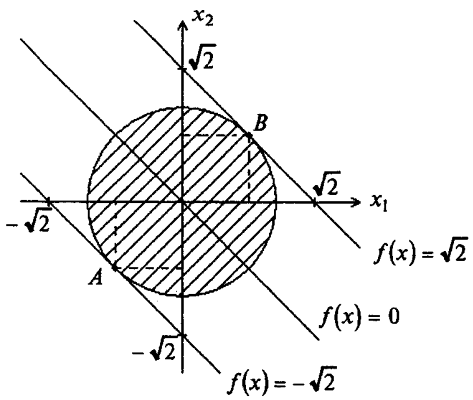

Рис. 3.11

регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.3). С другой стороны, функции $f(x)$ и $-f(x) = -x_1 - x_2$ - выпуклые и ограничение выпуклое (см. определения 1.7, 1.8 и пример 1.16), поэтому в точках A и B достигается глобальный экстремум (п. 9 замечаний 3.4). Достаточные условия первого и второго порядка проверялись для демонстрации методики.

5. Вычислим значение целевой функции в точках условного экстремума: $f(A) = -\sqrt{2}$, $f(B) = \sqrt{2}$. ■

Пример 3.14. Найти условный максимум в задаче

$$f(x) = x_1 \to \max,$$
$$g_1(x) = -x_2 \le 0,$$
$$g_2(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(-x_2) + \lambda_2\left[x_2 - (1 - x_1)^3\right].$$

2. Выпишем необходимые условия максимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 3\lambda_2(1 - x_1)^2 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0$;

б) $-x_2 \le 0$, $\quad x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0$;

в) $\lambda_1 \le 0$, $\quad \lambda_2 \le 0$;

г) $\lambda_1(-x_2) = 0$, $\quad \lambda_2\left[x_2 - (1 - x_1)^3\right] = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$, тогда $x_1^* = 1$, а $x_2^* = 0$. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 \le 0$, например, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = -1$. Получили условно-стационарную точку $x^* = (1,0)^T, \lambda_0^* = 0$.

На рис. 3.12 показано, что в точке $x^* = (1,0)^T$ достигается нерегулярный локальный и глобальный максимум. В ней условие линейной независимости градиентов $\nabla g_1(x^*) = (0,-1)^T$, $\nabla g_2(x^*) = (0,1)^T$ не выполняется (см. пример 3.4), и антиградиент целевой функции не может быть представлен в виде неположительной линейной комбинации градиентов активных ограничений. Условие "а" выполняется только при $\lambda_0^* = 0$. Покажем это.

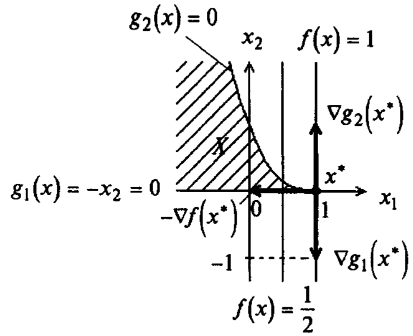

Рис. 3.12

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Тогда поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Имеем:

$$1 + 3\lambda_2(1 - x_1)^2 = 0;$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$
$$-x_2 \le 0, \quad x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0;$$
$$\lambda_1 \le 0, \quad \lambda_2 \le 0;$$
$$\lambda_1(-x_2) = 0, \quad \lambda_2\left[x_2 - (1 - x_1)^3\right] = 0.$$

Рассмотрим четыре варианта выполнения условия дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Из первого уравнения следует, что система несовместна;

2) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$. Из первого уравнения также следует, что система несовместна;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Из второго уравнения получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

4) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Тогда $x_2 = 0$, $x_1 = 1$ и первое уравнение не удовлетворяется.

Новых условно-стационарных точек не найдено. Поэтому в задаче имеется только одна точка $x^* = (1,0)^T$ нерегулярного максимума с $f(x^*) = 1$. ■

Пример 3.15. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 52 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0\left[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2\right] + \lambda_1\left[x_1^2 + x_2^2 - 52\right].$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0(x_2 - 3) + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 52 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 52\right) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \ne 0$ согласно утверждению 3.4. Поэтому $x_1 = 0, x_2 = 0$ и не выполняется условие "г" дополняющей нежесткости.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 52 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 52\right) = 0$.

Рассмотрим два варианта выполнения условия "г" :

1) $\lambda_1 = 0$. Тогда $x_1 = 2, x_2 = 3$ и выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума (строки 1 и 2 в табл. 3.2). Имеем условно-стационарную точку *A*: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 3,\ \lambda_1^* = 0$;

2) $\lambda_1 \ne 0$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 - 52 = 0$ и система имеет решение:

точка B: $x_1^* = 4,\quad x_2^* = 6,\quad \lambda_1^* = -\dfrac{1}{2}$; точка C: $x_1^* = -4,\quad x_2^* = -6,\quad \lambda_1^* = -\dfrac{3}{2}$.

Так как $\lambda_1^* < 0$ в обеих точках, то в них минимума нет, но может быть максимум.

4. Проверим достаточные условия экстремума. В обеих условно-стационарных точках ограничение превращается в равенство, т.е. активно. Так как число активных ограничений $l = 1 < 2 = n$, то условия первого порядка не выполняются. Так как функция $-f(x) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$ не является выпуклой (см. определение 1.8), то необходимые условия не являются достаточными (п.9 замечаний 3.4). Проверим условия второго порядка:

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2.$$

В точке A ограничение не является активным. Так как $\lambda_1^* = 0$, то $d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $dx \ne 0$. Поэтому в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.3). Так как целевая функция $f(x)$ выпуклая и множество допустимых решений выпукло (рис. 3.13), то можно заключить, что в данном случае необходимое условие минимума является достаточным. В точке A - глобальный минимум (п.9 замечаний 3.4). В точках B и C ограничение активно. Поэтому $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$. В точках B и C выполняется $dx_1 = -\dfrac{3}{2}dx_2$. Так как $d^2L(B) = \left[\left(-\dfrac{3}{2}\right)dx_2\right]^2 + dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \ne 0$, а $\lambda_1^* = -\dfrac{1}{2} < 0$, то достаточные условия максимума не выполняются (строка 2 в табл. 3.3). Так как $d^2L(B) \ge 0$ при всех dx_2, то и необходимое условие максимума второго порядка в точке B не выполняется (строка 4 в табл. 3.3). Поэтому в ней нет экстремума. Так как $d^2L(C) = -\left[\left(-\dfrac{3}{2}\right)dx_2\right]^2 - dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \ne 0$, то достаточные условия максимума выполняются. В точке C условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.3).

5. Вычислим значения функции в точках экстремума $f(A) = 0, f(C) = 117$. ■

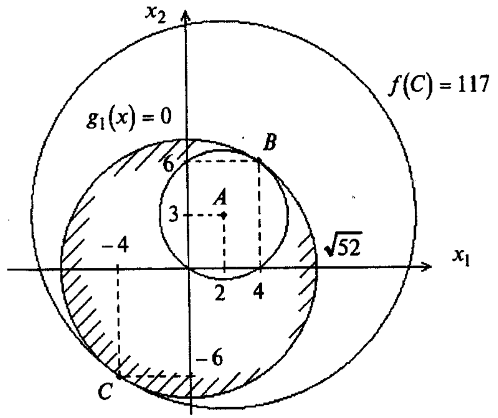

Рис. 3.13

Пример 3.16. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = (x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0$$

при $\alpha = 2, \alpha = 1, \alpha = -\dfrac{1}{2}, \alpha = 0, \alpha = -1$.

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left[(x_1-\alpha)^2+x_2^2\right]+\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)+\lambda_2(-x_1).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума второго порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-\alpha)+2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0 x_2+2\lambda_1 x_2=0$;

б) $x_1^2+x_2^2-1\le 0$, $-x_1\le 0$;

в) $\lambda_1\ge 0$, $\lambda_2\ge 0$ (для минимума); $\lambda_1\le 0$, $\lambda_2\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)=0$, $\lambda_2(-x_1)=0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0=0$. Тогда из первых двух уравнений следует:

$$2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0,$$
$$2\lambda_1 x_2=0.$$

Рассмотрим четыре варианта выполнения условия "г":

1) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$. Этот вариант противоречит утверждению 3.4;

2) $\lambda_1=0$, $\lambda_2\ne 0$. Из первого соотношения $\lambda_2=0$, т.е. имеется противоречие;

3) $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2=0$. Тогда $x_1=x_2=0$ и не выполняется первое из условий дополняющей нежесткости "г";

4) $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2\ne 0$. Тогда $x_1=0$, а $x_2=\pm 1$. При этом не удовлетворяется второе уравнение из условий "а".

Во втором случае $\lambda_0\ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Получим:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=2(x_1-\alpha)+2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1 x_2=0$;

б) $x_1^2+x_2^2-1\le 0$, $-x_1\le 0$;

в) $\lambda_1\ge 0$, $\lambda_2\ge 0$ (для минимума); $\lambda_1\le 0$, $\lambda_2\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)=0$, $\lambda_2(-x_1)=0$.

Рассмотрим четыре варианта удовлетворения условия "г" :

1) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$. Получаем условно-стационарную точку A:

$$x_1^*=\alpha,\quad x_2^*=0,\quad \lambda_1^*=0,\quad \lambda_2^*=0;$$

2) $\lambda_1=0$, $\lambda_2\ne 0$. Тогда $x_1=0, x_2=0$, а $\lambda_2=-2\alpha$. Получаем условно-стационарную точку B: $x_1^*=0$, $x_2^*=0$, $\lambda_1^*=0$, $\lambda_2^*=-2\alpha$;

3) $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2=0$. Тогда

$$x_1^2+x_2^2-1=0,\quad 2(x_1-\alpha)+2\lambda_1 x_1=0,\quad 2x_2(1+\lambda_1)=0.$$

Из третьего соотношения имеем: $x_2=0$ или $\lambda_1=-1$. При $x_2=0$ получаем: $x_1=\pm 1$. Ограничению удовлетворяет $x_1=1$. Тогда $\lambda_1=\alpha-1$. Найдена условно-стационарная точка C: $x_1^*=1$, $x_2^*=0$, $\lambda_1^*=\alpha-1$, $\lambda_2^*=0$. При $\lambda_1^*=-1$ параметр α

должен быть нулевым. Тогда имеется бесконечное множество условно-стационарных точек D, лежащих на полуокружности (рис. 3.14, *г*);

4) $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2\ne 0$. Тогда $x_1=0$, а $x_2=\pm 1$. При этом $\lambda_1=-1$, а $\lambda_2=-2\alpha$. Получаем еще две условно-стационарные точки:

E: $x_1^*=0$, $x_2^*=1$, $\lambda_1^*=-1$, $\lambda_2^*=-2\alpha$; F: $x_1^*=0$, $x_2^*=-1$, $\lambda_1^*=-1$, $\lambda_2^*=-2\alpha$.

Таким образом, имеется шесть условно-стационарных точек.

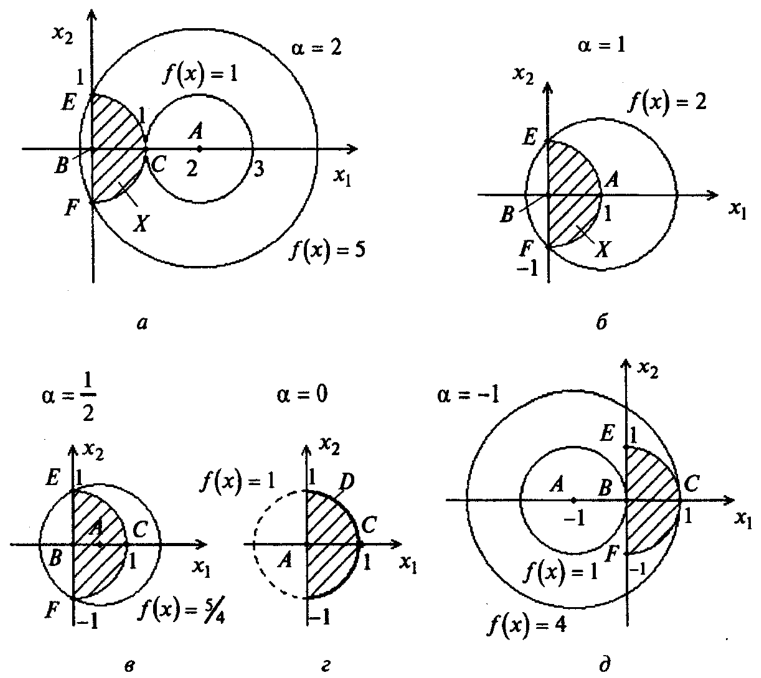

Рис. 3.14

4. Проверим достаточные условия экстремума для различных значений параметра α (рис. 3.14, *а* - *д*).

Исследуем точку A: $x_1^*=\alpha$, $x_2^*=0$, $\lambda_1^*=0$, $\lambda_2^*=0$. При $\alpha=2$ точка A не лежит в множестве допустимых решений, так как $x_1^*=2$, $x_2^*=0$. При $\alpha=1$ имеем: $x_1^*=1$, $x_2^*=0$, $\lambda_1^*=\lambda_2^*=0$. В точке A активно первое ограничение. Так как число активных ограничений $l=1<n=2$, то достаточные условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка:

$$d^2L(A)=\left(2+2\lambda_1^*\right)dx_1^2+\left(2+2\lambda_1^*\right)dx_2^2=2dx_1^2+2dx_2^2;$$

$$dg_1(A)=2x_1^*\,dx_1+2x_2^*\,dx_2=2dx_1=0.$$

Получаем $d^2L(A) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.3). При $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем: $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$. Активных ограничений нет. Так как $d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $dx \neq 0$, то в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.3). При $\alpha = 0$ имеем: $x_1^* = 0, x_2^* = 0, \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$. В точке A активно второе ограничение:

$$d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2;$$

$$dg_2(A) = -dx_1 = 0.$$

Так как $d^2L(A) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке A - условный локальный минимум. При $\alpha = -1$ имеем: $x_1^* = -1, x_2^* = 0$, т.е. точка A не лежит в множестве допустимых решений. Так как целевая функция выпуклая и множество допустимых решений X выпукло, то в случаях $\alpha = 1; \frac{1}{2}; 0$ необходимые условия минимума являются и достаточными, а в точке A достигается глобальный минимум (п. 9 замечаний 3.4).

Исследуем точку B: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = 0,\ \lambda_2^* = -2\alpha \neq 0$. Так как в этой точке активно только второе ограничение, то достаточные условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка:

$$d^2L(B) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 = 2dx_1^2 + 2dx_2^2;$$

$$dg_2(B) = -dx_1 = 0.$$

Отсюда $d^2L(B) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Если $\alpha = 2, 1, \frac{1}{2}$, то $\lambda_2^* = -2\alpha < 0$ и не удовлетворяются ни достаточные условия второго порядка, ни необходимые (строки 2 и 4 в табл. 3.3). Поэтому в точке B для этих значений параметра нет экстремума. Если $\alpha = 0$, то $\lambda_2^* = 0$, что противоречит условию $\lambda_2^* \neq 0$. Если $\alpha = -1$, то $\lambda_2^* \geq 0$, и в точке B удовлетворяются достаточные условия локального минимума (строка 1 в табл. 3.3). Так как $f(x)$ и множество X выпуклые, то в точке B при $\alpha = -1$ достигается глобальный минимум (п. 9 замечаний 3.4).

Исследуем точку C: $x_1^* = 1, x_2^* = 0, \lambda_1^* = \alpha - 1 \neq 0, \lambda_2^* = 0$. При $\alpha = 2$ получаем $\lambda_1^* = 1 > 0$. Активно первое ограничение:

$$d^2L(C) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 = 4dx_1^2 + 4dx_2^2;$$

$$dg_1(C) = 2x_1^*\,dx_1 + 2x_2^*\,dx_2 = 2dx_1 = 0.$$

Так как $d^2L(C) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке C - локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.3). Так как $f(x)$ и множество X выпуклые, то в точке C - одновременно глобальный минимум (п. 9 замечаний 3.4). При $\alpha = 1$ получаем

$\lambda_1^* = 0$, что противоречит условию $\lambda_1^* \neq 0$. При $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем $\lambda_1^* = -\frac{1}{2} < 0$, $\lambda_2^* = 0$. Активно первое ограничение:

$$d^2L(C) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 = dx_1^2 + dx_2^2;$$

$$dg_1(C) = 2x_1^*\,dx_1 + 2x_2^*\,dx_2 = 2dx_1 = 0.$$

Так как $d^2L(C) = dx_2^2 > 0$, но $\lambda_1^* = -\frac{1}{2} < 0$, то не выполняются ни достаточные, ни необходимые условия второго порядка (строки 2 и 4 в табл. 3.3). В точке C нет экстремума. При $\alpha = 0$ имеем $\lambda_1^* = -1 < 0,\ \lambda_2^* = 0$ и $d^2L(C) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 \equiv 0$ для любых dx. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 6 в табл. 3.3) на наличие максимума, так как необходимое условие максимума первого порядка выполняется. Рис. 3.14, *г* показывает, что в точке C - условный максимум (глобальный и локальный). При $\alpha = -1$ получаем $\lambda_1^* = -2 < 0,\ \lambda_2^* = 0$ и

$$d^2L(C) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 = -dx_1^2 - dx_2^2;$$

$$dg_1(C) = 2x_1^*\,dx_1 + 2x_2^*\,dx_2 = 2dx_1 = 0.$$

Так как $d^2L(C) = -dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке C - условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.3).

Исследуем множество D при $\alpha = 0$. При этом $\lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = 0$. Так как $d^2L(D) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 \equiv 0$, то требуется дополнительное исследование на наличие условного максимума (строка 6 в табл. 3.3). Рис. 3.14, *г* показывает, что на множестве D достигается глобальный максимум.

Исследуем точки E и F: $x_1^* = 0, x_2^* = \pm 1,\ \lambda_1^* = -1,\ \lambda_2^* = -2\alpha \neq 0$. При $\alpha = 2, 1, \frac{1}{2}$ получаем $\lambda_1^* = -1 < 0, \lambda_2^* = -4, -2, -1 < 0$. В точках E и F два активных ограничения: $l = 2 = n = 2$. Так как $\lambda_1^* < 0$ и $\lambda_2^* < 0$, то выполняются достаточные условия максимума первого порядка (строка 2 в табл. 3.2). В точках E и F - локальный условный максимум. При $\alpha = 0$ получаем $\lambda_2^* = 0$, что противоречит условию $\lambda_2^* \neq 0$. При $\alpha = -1$ получаем $\lambda_1^* = -1 < 0,\ \lambda_2^* = 2 > 0$. Так как не выполняются необходимые условия минимума и максимума, то в точках E и F нет экстремума (строки 1 и 2 в табл. 3.2).

5. Вычислим значения функции в точках экстремума при различных α (рис. 3.14):

$\alpha = 2$: $f(C) = 1, f(E) = f(F) = 5$; $\alpha = 1$: $f(A) = 0, f(E) = f(F) = 2$;

$\alpha = \frac{1}{2}$: $f(A) = 0, f(E) = f(F) = \frac{5}{4}$; $\alpha = 0$: $f(A) = 0, f(D) = 1$;

$\alpha = -1$: $f(B) = 1, f(C) = 4$. ■

Пример 3.17. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0,$$
$$g_3(x) = -x_2 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0\left[x_1^2 + (x_2 - 2)^2\right] + \lambda_1\left[x_1^2 + x_2^2 - 1\right] + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3(-x_2).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,$

$\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 (x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0;$

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad -x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0;$

в) $\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0;$

г) $\lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) = 0, \quad \lambda_2(-x_1) = 0, \quad \lambda_3(-x_2) = 0.$

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда условия "а" запишутся в виде

$$2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0.$$

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. При этом не удовлетворяется требование утверждения 3.4;

2) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = x_2 = 0$ из условия "а", но первое условие дополняющей нежесткости не удовлетворяется;

3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда из первого уравнения в условии "а" имеем $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда из второго уравнения в условии "а" имеем $\lambda_3 = 0$, т.е. также имеется противоречие;

5) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 0$ и из первого уравнения в условии "а" имеем $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

6) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда $x_2 = 0$ и из второго уравнения в условии "а" имеем $\lambda_3 = 0$, т.е. также имеется противоречие;

7) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0, \lambda_3 \ne 0$. Тогда не выполняются оба уравнения в условии "а";

8) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда уравнения $x_1 = x_2 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, следующие из условия "г", вместе не выполняются.

Условно-стационарных точек пока не найдено.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Получаем:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0, \quad \dfrac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0;$

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad -x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0;$

в) $\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0;$

г) $\lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) = 0, \quad \lambda_2(-x_1) = 0, \quad \lambda_3(-x_2) = 0.$

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 0, x_2 = 2$ и не выполняется первое ограничение в условии "б";

2) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$2x_1(1 + \lambda_1) = 0,$$
$$2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0.$$

Если $\lambda_1 = -1$, то третье уравнение не удовлетворяется. Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \pm 1$. Ограничениям в условии "б" удовлетворяет $x_2 = 1$. При этом $\lambda_1 = 1$. Получили условно-стационарную точку A: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = 1,\ \lambda_2^* = 0,\ \lambda_3^* = 0$;

3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_1 = 0,$$
$$2x_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) = 0.$$

Получаем $\lambda_2 = 2x_1 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \ne 0$;

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_2 = 0,$$
$$2x_1 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0.$$

Получаем $\lambda_3 = -4 < 0$, что противоречит условию "в";

5) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$x_1 = 0,$$
$$2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0.$$

Из третьего соотношения следует, что $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

6) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$x_2 = 0,$$
$$2x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $\lambda_3 = -4 < 0$. Это противоречит условию "в";

7) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$x_1 = x_2 = 0,$$
$$2x_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0.$$

Из второго соотношения следует, что $\lambda_2 = 0$. Это противоречит условию $\lambda_2 \neq 0$;

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Из условия "г" следует: $x_1 = 0, x_2 = 0$. Эта система несовместна.

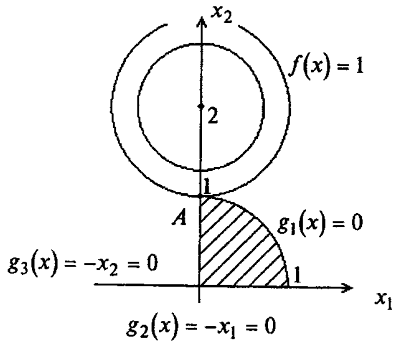

Рис. 3.15

4. Проверим достаточные условия минимума. В точке A имеются два активных ограничения, т.е. $l = 2 = n = 2$ (рис. 3.15). Так как $\lambda_1^* = 1 > 0$, $\lambda_2^* = 0$, то достаточные условия минимума первого порядка не выполняются (строка 1 в табл. 3.2) ввиду того, что требуется строгая положительность соответствующих множителей Лагранжа. Проверим условия второго порядка:

$$d^2L(A) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2.$$

Так как в точке два активных ограничения и для одного из них $\lambda_1^* > 0$, а для другого $\lambda_2^* = 0$, то применим условия (3.18) (строка 1 в табл. 3.3):

$$dg_1(A) = 2x_1^*\,dx_1 + 2x_2^*\,dx_2 = 2dx_2 = 0, \quad \lambda_1^* > 0;$$

$$dg_2(A) = -dx_1 \le 0, \quad \lambda_2^* = 0.$$

В результате $d^2L(A) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \ge 0$ и $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке A - локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.3). С другой стороны, целевая функция и множество допустимых решений выпуклые. Поэтому в точке A достигается глобальный минимум (п. 9 замечаний 3.4).

5. Вычислим значение функции в точке глобального минимума: $f(A) = 1$. ■

Пример 3.18. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 - 3x_2 + 3 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2\right) + \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) + \lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$,

$$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_3} = 4\lambda_0 x_3 - \lambda_1 = 0;$$

б) $-x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0$, $\quad -x_1 - 3x_2 + 3 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$;

г) $\lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) = 0$, $\quad \lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, что противоречит утверждению 3.4.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения системы, приведенные в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Условия "а" запишутся в виде:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_3} = 4x_3 - \lambda_1 = 0.$$

Рассмотрим четыре варианта удовлетворения условий "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тогда из условия "а" следует: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. При этом ограничения "б" не выполняются;

2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Тогда $g_1(x) = 0$ и справедливы уравнения:

$$-x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0,$$
$$2x_1 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda_1}{2},$$
$$2x_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1}{2},$$
$$4x_3 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{\lambda_1}{4}.$$

Отсюда $\lambda_1 = \dfrac{4}{5} > 0$, а $x_1 = x_2 = \dfrac{2}{5}, x_3 = \dfrac{1}{5}$. Второе неравенство в условии "б" не выполняется, так как $-\dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{5} + 3 = \dfrac{7}{5} > 0$;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $g_2(x) = 0$ и справедливы уравнения:

$$-x_1 - 3x_2 + 3 = 0,$$
$$2x_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda_2}{2},$$
$$2x_2 - 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3\lambda_2}{2},$$
$$4x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 0.$$

В результате $\lambda_2 = \frac{3}{5} > 0$ и $x_1 = \frac{3}{10}$, $x_2 = \frac{9}{10}$, $x_3 = 0$. Первое неравенство в условии "б" в данной точке выполняется, так как $-\frac{3}{10} - \frac{9}{10} + 1 = -\frac{1}{5} < 0$. Имеем условно-стационарную точку A: $x_1^* = \frac{3}{10}$, $x_2^* = \frac{9}{10}$, $x_3^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = \frac{3}{5}$;

4) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$ и справедливы равенства:

$$-x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0,$$
$$-x_1 - 3x_2 + 3 = 0,$$
$$2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$
$$2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{2},$$
$$4x_3 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{\lambda_1}{4}.$$

Подставляя в первые два соотношения, получаем:

$$-5\lambda_1 - 8\lambda_2 + 4 = 0,$$
$$-2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -\frac{4}{9}$, $\lambda_2 = \frac{7}{9}$. Так как $\lambda_1 < 0$, то условие "в" не выполняется.

4. Проверим достаточные условия экстремума. В точке A одно активное ограничение, так как $g_2(A) = 0$. Поэтому $l = 1 < n = 3$ и достаточное условие минимума первого порядка не выполняется (строка 1 в табл. 3.2). Поэтому проверим достаточные условия второго порядка:

$$d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2, \qquad dg_2(A) = -dx_1 - 3dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = -3dx_2$ и $d^2L(A) = 2(-3dx_2)^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2 > 0$ при $dx \neq 0$. Поэтому в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.3). С другой стороны, целевая функция и функции $g_1(x), g_2(x)$ выпуклые, так как ограничения линейные и для них $H(x) = 0$, а для целевой функции матрица Гессе $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} > 0$, потому что $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, $\Delta_3 = 16 > 0$ (см. п. 3 замечаний 1.4). Поэтому в точке A - глобальный минимум (п. 9 замечаний 3.4).

5. Вычислим значение функции в точке условного минимума:

$$f(A) = \frac{9}{100} + \frac{81}{100} + 0 = \frac{9}{10}. \ ■$$

Пример 3.19. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_2 - x_1^3 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_2 - x_1^3 \le 0,$$
$$g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1^3) + \lambda_2(-x_2 - x_1^3) + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$

$\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0;$

б) $x_2 - x_1^3 \le 0$, $\quad -x_2 - x_1^3 \le 0$, $\quad x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$, $\quad \lambda_2 \ge 0$, $\quad \lambda_3 \ge 0$;

г) $\lambda_1(x_2 - x_1^3) = 0$, $\quad \lambda_2(-x_2 - x_1^3) = 0$, $\quad \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Рассмотрим восемь вариантов удовлетворения условий "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Не удовлетворяется требование утверждения 3.4 о существовании ненулевого вектора (λ_0^*, λ^*);

2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-3\lambda_1 x_1^2 = 0,$$
$$\lambda_1 = 0.$$

Имеется противоречие, так как $\lambda_1 \neq 0$;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-3\lambda_2 x_1^2 = 0,$$
$$-\lambda_2 = 0.$$

Имеется противоречие, так как $\lambda_2 \neq 0$;

4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$2\lambda_3 x_2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Отсюда следует, что $x_1 = x_2 = 0$, но при этом не удовлетворяется третье уравнение;

5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_1^2 = 0,$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Система удовлетворяется при $x_1 = x_2 = 0$ и любых $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, например, равных единице. Имеем условно-стационарную точку A: $x_1^* = x_2^* = 0, \lambda_0^* = 0, \lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$;

6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$-3\lambda_1 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Получаем $\lambda_1 = -2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$. После подстановки в третье уравнение имеем $6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 2\lambda_3 x_1 (3x_1^4 + 1) = 0$. Так как $\lambda_3 \neq 0$, то $x_1 = 0$. Тогда $x_2 = 0$ и не удовлетворяется второе уравнение;

7) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$-3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$-\lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Получаем $\lambda_2 = 2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$. Из третьего уравнения имеем $6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 2\lambda_3 x_1 (3x_1^4 + 1) = 0$. Так как $\lambda_3 \neq 0$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. При этом не удовлетворяется второе уравнение;

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Из условия "г" следует система

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$

которая несовместна (рис. 3.16).

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0, заменяя $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. При этом соотношения "б"-"г" не изменяются, а условие "а" записывается в форме

$$1 - 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Рассмотрим восемь вариантов удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Первое уравнение в условии "а" несовместно;

2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0,$$
$$\lambda_1 = 0.$$

Имеется противоречие, так как $\lambda_1 \neq 0$;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$1 - 3\lambda_2 x_1^2 = 0,$$
$$-\lambda_2 = 0.$$

Имеется противоречие, так как $\lambda_2 \neq 0$;

4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Так как $\lambda_3 \neq 0$, то $x_2 = 0$, а $x_1 = \pm 1$. Ограничениям "б" удовлетворяет $x_1 = 1$. При этом $\lambda_3 = -\frac{1}{2} < 0$, что не удовлетворяет условию "в";

5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$1 - 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_1^2 = 0,$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Первые два уравнения удовлетворяются только при $x_1 = x_2 = 0$ (рис. 3.16), но при этом третье уравнение несовместно;

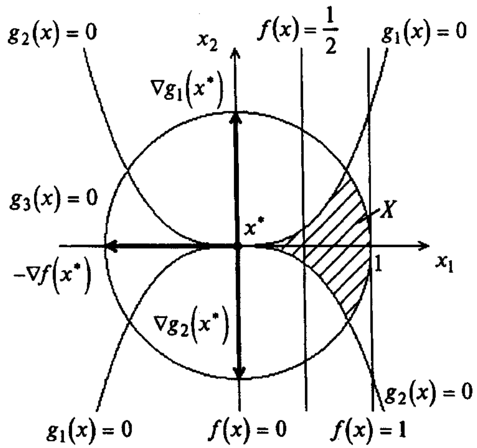

Рис. 3.16

6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$1 - 3\lambda_1 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$ и $1 + 6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 0$. Так как $2\lambda_3 x_1\left(3x_1^4 + 1\right) = -1$ только при $\lambda_3 > 0$, $x_1 < 0$ (не лежит в множестве X, рис. 3.16) или $\lambda_3 < 0$, $x_1 > 0$ (не удовлетворяется условие "в"), то система несовместна;

7) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$1 - 3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$-\lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Отсюда $\lambda_2 = 2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$ и $1 + 6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 0$. Так как $2\lambda_3 x_1\left(3x_1^4 + 1\right) = -1$ только при $\lambda_3 > 0$, $x_1 < 0$ (не удовлетворяются ограничения "б") и $\lambda_3 < 0$, $x_1 > 0$, (не удовлетворяется условие "в"), то система несовместна;

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Из условий "г" следует:

$$x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$-x_2 - x_1^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Система несовместна (рис. 3.16).

Таким образом, найдена единственная условно-стационарная точка A.

4. Так как $\lambda_0^* = 0$, то достаточные условия не проверяются. Из рис. 3.16 следует, что в точке A достигается глобальный условный минимум. Точка A является нерегулярной точкой минимума. В этой точке нельзя представить антиградиент $-\nabla f(A) = (-1,0)^T$ в виде неотрицательной линейной комбинации градиентов активных ограничений: $\nabla g_1(A) = (0,1)^T$, $\nabla g_2(A) = (0,-1)^T$.

5. Значение функции в точке условного минимума $f(A) = 0$. ■

Пример 3.20. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \leq 0,$$
$$g_3(x) = -x_2 \leq 0.$$

□ Как следует из рис. 3.17, глобальный минимум достигается в точке A: $x_1^* = x_2^* = 0$.

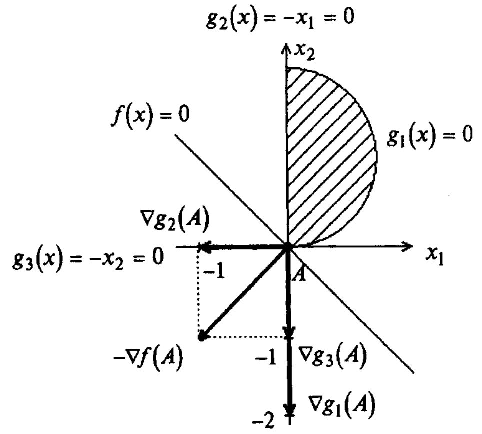

Рис. 3.17

В точке A все три ограничения активны и их градиенты линейно зависимы, так как $\nabla g_1(A) = (0,-2)^T$, $\nabla g_2(A) = (-1,0)^T$, $\nabla g_3(A) = (0,-1)^T$ и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 < m = 3$$

(см. определение 3.6). Условие регулярности в утверждении 3.4 не выполняется. Условие "а" в нем имеет вид

$$-\lambda_0 \nabla f(A) = \lambda_1 \nabla g_1(A) + \lambda_2 \nabla g_2(A) + \lambda_3 \nabla g_3(A) \quad \text{или}$$

$$\lambda_0\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то не существует таких неотрицательных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, чтобы сумма, стоящая справа, равнялась нулю. В этом случае условно-стационарных точек нет.

Если $\lambda_0 \neq 0$, можно поделить равенство на λ_0, заменяя $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. При этом равенство будет справедливо при $\lambda_1^* = \frac{1}{2}, \lambda_2^* = 1, \lambda_3^* = 0$. Это свидетельствует о том, что первое и второе ограничения активны: $g_1(A) = 0, g_2(A) = 0$, а третье не является активным. Заметим, что третье ограничение в задаче является "лишним", так как его добавление не меняет множества допустимых решений. Хотя условие регулярности в точке A не выполняется, она является точкой регулярного минимума, так как $\lambda_0^* \neq 0$. ■

Пример 3.21. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0,$$
$$g_3(x) = -x_2 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3(-x_2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = \lambda_1 - \lambda_3 = 0;$

б) $x_1 + x_2 - 1 \le 0, \quad -x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0;$

в) $\lambda_1 \ge 0, \ \lambda_2 \ge 0, \ \lambda_3 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0, \ \lambda_2 \le 0, \ \lambda_3 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0, \quad \lambda_2(-x_1) = 0, \quad \lambda_3(-x_2) = 0.$

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и имеется противоречие утверждению 3.4. Если $\lambda_1 \ne 0$, то $\lambda_2 \ne 0$ и $\lambda_3 \ne 0$. Тогда $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $-x_1 = 0$, $-x_2 = 0$. Последние три уравнения образуют несовместную систему.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим систему, приведенную в п.2, на λ_0, заменяя $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. При этом соотношения "б"-"г" сохраняют вид, а условие "а" записывается в форме:

$$1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_1 - \lambda_3 = 0.$$

Рассмотрим восемь вариантов удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0$. Первое уравнение в условии "а" не удовлетворяется;

2) $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0$. Из условия "а" $\lambda_1 = 0$, т.е. имеется противоречие;

3) $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 \ne 0, \ \lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_2 = 1, \ x_1 = 0, \ x_1 + x_2 - 1 \le 0, -x_2 \le 0$. Получили бесконечное множество решений - точки отрезка AB (см. рис. 1.9): $x_1^* = 0, \ 0 \le x_2^* \le 1, \ \lambda_1^* = 0, \ \lambda_2^* = 1 > 0, \ \lambda_3^* = 0$. Удовлетворяется необходимое условие минимума;

4) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 \ne 0$. Из условия "а" $\lambda_3 = 0$, т.е. имеется противоречие;

5) $\lambda_1 \ne 0, \ \lambda_2 \ne 0, \ \lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$, т.е. также имеется противоречие;

6) $\lambda_1 \ne 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 \ne 0$. Тогда $\lambda_1 = -1 < 0, \ \lambda_3 = \lambda_1 = -1, \ x_1 + x_2 - 1 = 0, \ -x_2 = 0$. Получили условно-стационарную точку C (см. рис. 1.9):

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0, \quad \lambda_1^* = \lambda_3^* = -1 < 0, \quad \lambda_2^* = 0.$$

В ней удовлетворяются необходимые условия максимума;

7) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0, \ \lambda_3 \ne 0$. Из условия "а" $\lambda_3 = 0$, т.е. имеется противоречие;

8) $\lambda_1 \ne 0, \ \lambda_2 \ne 0, \ \lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1 + x_2 - 1 = 0,$$
$$-x_1 = 0,$$
$$-x_2 = 0.$$

Последняя система несовместна.

4. Проверим достаточные условия экстремума. На множестве AB активно одно ограничение, поэтому достаточные условия первого порядка не выполняются (строка 1 в табл. 3.2). Кроме того, $d^2L(A) = d^2L(B) \equiv 0$ и поэтому достаточные условия минимума второго порядка также не выполняются (строка 1 в табл. 3.3) и требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.3). С другой стороны, целевая функция и ограничения выпуклые, поэтому на отрезке AB достигается глобальный минимум (п. 9 замечаний 3.4). В точке C два ограничения активны: $l = 2 = n = 2$. Так как $\lambda_1 < 0, \lambda_3 < 0$, то выполняется достаточное условие локального максимума первого порядка (строка 2 в табл. 3.2). Так как функция "$-f(x)$" $= -x_1$ и ограничения выпуклые, то в точке C - глобальный максимум (п. 9 замечаний 3.4).

5. Вычислим значение функции в точках условного экстремума: $f(A) = f(B) = 0, \quad f(C) = 1$. ■

3.4. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и функции ограничений типа равенств и неравенств: $g_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, m$; $g_j(x) \le 0, \ j = m+1, \ldots, p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \tag{3.19}$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, m; \ m < n \\ g_j(x) \le 0, \ j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локального экстремума с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при смешанных ограничениях (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f(x^*)$ функции в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 3.8 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* *- точка локального минимума (максимума) в задаче* (3.19). *Тогда найдется такое число* $\lambda_0^* \ge 0$ *и вектор* $\lambda^* = \left(\lambda_1^*,\dots,\lambda_p^*\right)^T$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:*

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x :

$$\frac{\partial L\left(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\dots,n; \tag{3.20 а}$$

- условие допустимости решения:

$$g_j\left(x^*\right) = 0,\ j = 1,\dots,m; \qquad g_j\left(x^*\right) \le 0,\ j = m+1,\dots,p; \tag{3.20 б}$$

- условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^* \ge 0, \qquad j = m+1,\dots,p \tag{3.20 в}$$

(*условие неположительности для условного максимума:* $\lambda_j^* \le 0,\ j = m+1,\dots,p$);

- условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^*\, g_j\left(x^*\right) = 0, \qquad j = m+1,\dots,p. \tag{3.20 г}$$

Если при этом градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы (выполняется *условие регулярности*), то $\lambda_0^* \ne 0$.

З а м е ч а н и я 3.6.

1. Пункты 1 - 7 замечаний 3.4 остаются справедливы и для данной задачи, если заменить (3.16) на (3.20), а утверждение 3.4 на 3.8.

2. Условие (3.20 а) в регулярной точке экстремума ($\lambda_0^* \ne 0$) отражает факт, что антиградиент целевой функции является неотрицательной (неположительной в случае максимума) линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения-неравенства в точке x^* и ограничения-равенства (сравните с п. 5 замечаний 3.1 и п. 8 замечаний 3.4).

3. При $\lambda_0^* \ne 0$ справедливы два важных утверждения:

1) *если функции* $f(x)$, $g_j(x)$, $j = m+1,\dots,p$, *выпуклые, а функции* $g_j(x)$, $j = 1,\dots,m$, *линейные, то условия утверждения 3.8 являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума;*

2) *если функции* "$-f(x)$", $g_j(x), j = m+1,\dots,p$, *выпуклые, а функции* $g_j(x)$, $j = 1,\dots,m$, *линейные, то условия утверждения 3.8 являются одновременно и достаточными условиями глобального максимума.*

В обоих случаях множество допустимых решений X выпукло.

4. Следует подчеркнуть, что условия дополняющей нежесткости и знакоопределенности множителей Лагранжа записываются только для ограничений-неравенств.

5. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (3.19), включено в (3.20) для удобства формирования алгоритма решения.

6. Из условия дополняющей нежесткости (3.20 г) следует, что если ограничение-неравенство в точке x^* пассивное, т.е. $g_j(x^*) < 0$, то $\lambda_j^* = 0$, а если - активное, т.е. $g_j(x^*) = 0$, то $\lambda_j^* \ge 0$ (для минимума) и $\lambda_j^* \le 0$ (для максимума).

Утверждение 3.9 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, *удовлетворяющая системе* (3.20) *при* $\lambda_0^* \ne 0$, *суммарное число активных ограничений-неравенств в точке* x^* *и ограничений-равенств совпадает с числом* n *переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если* $\lambda_j^* > 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* x^* *- точка условного локального минимума в задаче* (3.19). *Если* $\lambda_j^* < 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то* x^* *- точка условного локального максимума.*

Утверждение 3.10 (необходимые условия минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* *- регулярная точка минимума (максимума) в задаче* (3.19) *и имеется решение* $\left(x^*,\lambda^*\right)$ *системы* (3.20). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* $\left(x^*,\lambda^*\right)$, *неотрицателен (неположителен):*

$$d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) \ge 0 \qquad \left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) \le 0\right)$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j\left(x^*\right) = 0,\ j = 1,\dots,m \ \text{ и } \ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right) \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 3.11 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, *удовлетворяющая системе* (3.20) *при* $\lambda_0^* \ne 0$. *Если в этой точке* $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) > 0$ $\left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) < 0\right)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j\left(x^*\right) = 0,\ j = 1,\dots,m \ \text{ и } \ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right) \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (3.19).

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0\, f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i}=0, \quad i=1,\dots,n;$

б) $g_j(x^*)=0,\ j=1,\dots,m; \quad g_j(x^*)\le 0,\ j=m+1,\dots,p;$

в) $\lambda_j^*\ge 0,\ j=m+1,\dots,p$ (для минимума), $\lambda_j^*\le 0,\ j=m+1,\dots,p$ (для максимума);

г) $\lambda_j^*\, g_j(x^*)=0,\ j=m+1,\dots,p.$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^*=0$;

2) $\lambda_0^*\ne 0$ (при этом поделить условия "а", "в", "г" на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^*\ne 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^{p-m} вариантов удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств;

б) если $l=n$ и $\lambda_j^*>0$ для всех $j\in J_a$, т.е. для всех активных ограничений-неравенств, то в точке x^* - локальный минимум. Если $l=n$ и $\lambda_j^*<0$ для всех $j\in J_a$, то в точке x^* - локальный максимум. Если $l<n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*,λ^*):

$$d^2L(x^*,\lambda^*)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j;$$

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы ограничений-равенств и активных в точке x^* ограничений-неравенств:

$$dg_j(x^*)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=1,\dots,m \ \text{ и } \ j\in J_a;\ \lambda_j^*>0\ (\lambda_j^*<0); \qquad (3.21)$$

$$dg_j(x^*)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}dx_i\le 0,\ j\in J_a,\ \lambda_j^*=0;$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих (3.21). Если $d^2L(x^*,\lambda^*)>0$, то в точке x^* - условный локальный минимум. Если $d^2L(x^*,\lambda^*)<0$, то в точке x^* - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (утверждение 3.10), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (3.19) приведены в табл. 3.4, 3.5.

З а м е ч а н и е 3.7. В рассматриваемой задаче замечание 3.2 и пп. 1 и 3 замечаний 3.3 также справедливы с учетом замены (3.9) на (3.20).

Пример 3.22. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x)=x_1^2+x_2^2\to \text{extr},$$
$$g_1(x)=x_1-1=0,$$
$$g_2(x)=x_1+x_2-2\le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0(x_1^2+x_2^2)+\lambda_1(x_1-1)+\lambda_2(x_1+x_2-2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0x_1+\lambda_1+\lambda_2=0,\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0x_2+\lambda_2=0;$

б) $x_1-1=0,\ x_1+x_2-2\le 0;$

в) $\lambda_2\ge 0$ (для минимума), $\lambda_2\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(x_1+x_2-2)=0.$

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0=0$. Тогда $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=0$, что противоречит утверждению 3.8.

Во втором случае $\lambda_0\ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0, заменяя $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Условие "а" записывается в форме

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1+\lambda_2=0,\qquad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_2=0.$$

Остальные соотношения сохранят свой вид. Рассмотрим $2^{p-m}=2$ варианта удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2=0$. Тогда $x_2=0$. Из ограничения следует $x_1=1$, а из условия "а" $\lambda_1=-2$. Имеем условно-стационарную точку A: $x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ \lambda_1^*=-2,\ \lambda_2^*=0$, в которой удовлетворяются необходимые условия и минимума, и максимума;

Необходимые и достаточные условия первого порядка в задаче поиска условного экстремума при смешанных ограничениях

Таблица 3.4

№ п/п	Необходимые условия первого порядка				Достаточные условия первого порядка		
	$\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)$, $\lambda_j^* g_j(x^*)$, $j = m+1, \ldots, p$	$g_j(x^*)$, $j = 1, \ldots, m$	$g_j(x^*)$, $j = m+1, \ldots, p$	$\lambda_0^* \geq 0$, λ_j^*,	Число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств	λ_j^*, $j \in J_a$	Тип условно-стационарной точки
1	0	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	Условный локальный минимум
2	0	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	Условный локальный максимум

Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче поиска условного экстремума при смешанных ограничениях

Таблица 3.5

№ п/п	$d^2L(x^*, \lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j = 1, \ldots, m$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* > 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* = 0$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	> 0	$0,\ dx \neq 0$	$0,\ dx \neq 0$		≤ 0	Условный локальный минимум
2	< 0	$0,\ dx \neq 0$		$0,\ dx \neq 0$	≤ 0	Условный локальный максимум
3	≥ 0	0	0		≤ 0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	≤ 0	0		0	≤ 0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	$= 0$	0	0		≤ 0	Требуется дополнительное исследование
6	$= 0$	0		0	≤ 0	Требуется дополнительное исследование
7	$\gtrless 0$	0	0		≤ 0	Нет экстремума
8	$\gtrless 0$	0		0	≤ 0	Нет экстремума

2) $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $x_1 + x_2 - 2 = 0,\ 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,\ 2x_2 + \lambda_2 = 0,\ x_1 - 1 = 0$. Получаем условно-стационарную точку $B: x_1^* = 1, x_2^* = 1, \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = -2 < 0$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума.

4. Проверим достаточные условия экстремума.

Исследуем точку A. Ограничение-неравенство не является активным. Поэтому $l = 1 < n = 2$ и достаточные условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка: $d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. Так как ограничение $g_2(x) \leq 0$ в точке A пассивно, то $dg_1(A) = dx_1 = 0$ и $d^2L(A) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Следовательно, в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.5). С другой стороны, целевая функция задачи выпуклая (см. пример 1.19), ограничение-равенство - линейное, ограничение-неравенство - выпуклое (см. определение 1.8). Поэтому в точке A достигается глобальный минимум (п.3 замечаний 3.6), а достаточные условия второго порядка можно было не проверять. Если бы искался экстремум функции $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$, то функция "$-f(x)$" была бы выпуклой, а в точке A достигался бы глобальный максимум (п.3 замечаний 3.6).

Исследуем точку B. Ограничение $g_2(x) \leq 0$ является активным. Поэтому $l = 2 = n = 2$. Так как $\lambda_2^* = -2 < 0$, то в точке B выполняются достаточные условия максимума первого порядка (строка 2 в табл. 3.4) и она является точкой локального максимума. Из методических соображений проверим достаточные условия второго порядка: $d^2L(B) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. В точке B ограничение $g_2(x) = 0$ активно: $dg_1(B) = dx_1 = 0, dg_2(B) = dx_1 + dx_2 = 0$. Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(B) = 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 6 в табл. 3.5). На рис. 3.18 видно, что в точке B - условный локальный максимум, так как при приближении к точке B вдоль множества X функция возрастает, а при движении от точки B убывает. Это подтверждает сделанный ранее вывод.

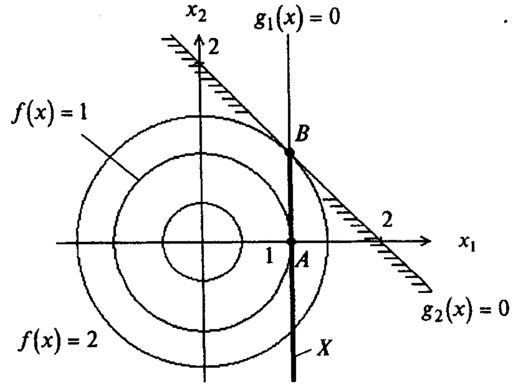

Рис. 3.18

5. Значения функции в точках экстремума: $f(A) = 1$, $f(B) = 2$. ■

Пример 3.23. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$g_2(x) = 1 - x_1 \le 0,$$
$$g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0\left(x_1^2 - x_2\right) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 6) + \lambda_2(1 - x_1) + \lambda_3\left(x_1^2 + x_2^2 - 26\right).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 6 = 0$, $\quad 1 - x_1 \le 0$, $\quad x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(1 - x_1) = 0$, $\lambda_3\left(x_1^2 + x_2^2 - 26\right) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда условия "а" имеют вид

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Рассмотрим четыре варианта удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и не удовлетворяется утверждение 3.8;

2) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \ne 0$;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Из двух последних уравнений следует: $2\lambda_3(x_2 - x_1) = 0$. Так как $\lambda_3 \ne 0$, то $x_1 = x_2$. Из двух первых уравнений следует:

$$x_1 = 1, x_2 = 5;$$
$$x_1 = 5, x_2 = 1;$$

т.е. $x_1 \ne x_2$. Поэтому система несовместна;

4) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$1 - x_1 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0.$$

Система удовлетворяется в точке $x_1 = 1, x_2 = 5$. Условия "а" примут вид

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -10\lambda_3$ и $\lambda_2 = -8\lambda_3$. Так как $\lambda_3 \ne 0$, то λ_2 и λ_3 имеют разные знаки, что противоречит условию и минимума, и максимума.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Условие "а" принимает форму

$$2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Условия "б" - "г" сохраняют вид. Рассмотрим четыре варианта выполнения условий "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 1$, а $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, что не удовлетворяет ограничениям "б";

2) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, а $x_2 = 5, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Получена условно-стационарная точка A: $x_1^* = 1, x_2^* = 5, \lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 3$, в которой удовлетворяются необходимые условия минимума;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Отсюда получаем точки с координатами $x_1 = 1, x_2 = 5$ и $x_1 = 5, x_2 = 1$. В первой точке имеем

$$2 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -\dfrac{11}{4}, \lambda_3 = \dfrac{3}{8}$. Во второй точке

$$10 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \dfrac{15}{4}, \lambda_3 = -\dfrac{11}{8}$. Получены условно-стационарные точка A': $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5$, $\lambda_1^* = -\dfrac{11}{4}$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = \dfrac{3}{8}$, в которой удовлетворяются необходимые условия минимума, и точка B: $x_1^* = 5$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1^* = \dfrac{15}{4}$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = -\dfrac{11}{8}$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума;

4) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$1 - x_1 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0$$

выполняется в точке $x_1 = 1, x_2 = 5$. Условие "а" принимает форму

$$2 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1 - 10\lambda_3$ и $3 - 8\lambda_3 - \lambda_2 = 0$. Так как $\lambda_2 \ne 0$ и $\lambda_3 \ne 0$, а также они должны быть одного знака, то последнее равенство выполняется только при

$\lambda_3 > 0, \lambda_2 > 0$, в частности, при $\lambda_3 = 0{,}1$; $\lambda_2 = 2{,}2$. При этом $\lambda_1 = 0$. Получили ту же условно-стационарную точку A": $x_1^* = 1$; $x_2^* = 5$; $\lambda_1^* = 0$; $\lambda_2^* = 2{,}2$; $\lambda_3^* = 0{,}1$.

4. Проверим достаточные условия экстремума первого порядка. Ограничение-равенство в точках A и B естественно выполняется. В точке A активно второе ограничение и, следовательно, $l = 2 = n$. Так как $\lambda_2^* = 3 > 0$, то в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.4). В точке A' активно третье ограничение и поэтому $l = 2 = n$. Так как $\lambda_3^* = \frac{3}{8} > 0$, то в точке A' - условный локальный минимум. В точке B активно третье ограничение и, следовательно, $l = 2 = n$. Так как $\lambda_3^* = -\frac{11}{8} < 0$, то в точке B - условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.4).

Проверим выполнение достаточных условий экстремума второго порядка из методических соображений:

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) = (2 + 2\lambda_3)\, dx_1^2 + 2\lambda_3\, dx_2^2 .$$

В точке A активно второе ограничение:

$$dg_1(A) = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_2(A) = -dx_1 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2 L(A) \equiv 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.5).

В точке A' активно третье ограничение:

$$dg_1(A') = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_3(A') = 2x_1^*\, dx_1 + 2x_2^*\, dx_2 = 2dx_1 + 10dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2 L(A') \equiv 0$. Поэтому тоже требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.5).

В точке B активно третье ограничение:

$$dg_1(B) = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_3(B) = 2x_1^*\, dx_1 + 2x_2^*\, dx_2 = 10dx_1 + 2dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2 L(B) \equiv 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 6 в табл. 3.5).

В точке A'' активны второе и третье ограничения:

$$dg_1(A'') = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_2(A'') = -dx_1 = 0,$$
$$dg_3(A'') = 2dx_1 + 10dx_2 = 0.$$

Поэтому $dx_1 = dx_2 = 0$, $d^2 L(A'') \equiv 0$ и требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.5).

Из рис. 3.19 следует, что в точках A и B - соответственно глобальный минимум и максимум.

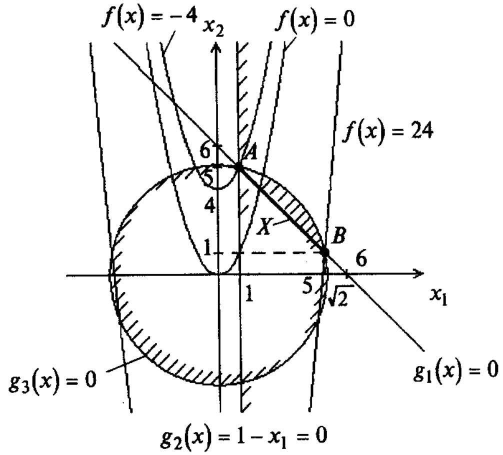

Рис. 3.19

Теперь исследуем свойства целевой функции и ограничений. Ограничение-равенство - линейное. Так как целевая функция и функции второго и третьего ограничений удовлетворяют условиям

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge 0, \quad H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge 0, \quad H_{g_3}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

то они выпуклы (см. п. 3 замечаний 1.4 и примеры 1.13, 1.14, 2.1, 2.3). Поэтому в точке A - глобальный минимум (п.3 замечаний 3.6). Так как функция $-f(x) = -x_1^2 + x_2$ не является выпуклой, то вывода о глобальном максимуме с помощью необходимых условий первого порядка сделать нельзя (п.3 замечаний 3.6).

5. Значения функции в точках условного экстремума: $f(A) = -4, f(B) = 24$.■

Пример 3.24. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 - x_2^2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0,$$
$$g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 (x_1 - x_2^2) + \lambda_1 (x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 - 5).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума и максимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0$;

б) $x_1 - x_2 - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 5\right) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда условие "а" имеет вид

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$$
$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия "г":

1) $\lambda_2 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и не удовлетворяется условие утверждения 3.8;

2) $\lambda_2 \ne 0$. Тогда система

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0$$

удовлетворяется в двух точках: $x_1 = 2, x_2 = 1$; $x_1 = -1, x_2 = -2$. Складывая два уравнения в условии "а", получаем $2\lambda_2(x_1 + x_2) = 0$. Так как $\lambda_2 \ne 0$, то $x_1 = -x_2$, что не удовлетворяется в обеих найденных точках.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Условие "а" принимает форму

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \quad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Остальные условия сохраняют вид. Рассмотрим два варианта удовлетворения условия "г":

1) $\lambda_2 = 0$. Имеем

$$1 + \lambda_1 = 0,$$
$$-2x_2 - \lambda_1 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{3}{2}$. Получили условно-стационарную точку A : $x_1^* = \frac{3}{2}$, $x_2^* = \frac{1}{2}$, $\lambda_1^* = -1$, $\lambda_2^* = 0$. В ней удовлетворяется необходимое условие и минимума, и максимума;

2) $\lambda_2 \ne 0$. Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0,$$
$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$$
$$-2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Получаем условно-стационарные точки:

B : $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1^* = -\frac{5}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{1}{6} > 0$; C : $x_1^* = -1$, $x_2^* = -2$, $\lambda_1^* = \frac{2}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{5}{6} > 0$.

В них удовлетворяются необходимые условия минимума.

4. Проверим достаточные условия экстремума первого порядка.

В точке A ограничение-неравенство не является активным, поэтому $l = 1 < n = 2$ и условия не выполняются (строки 1 и 2 в табл. 3.4).

В точках B и C ограничение-неравенство активное, поэтому $l = n = 2$. В обеих точках $\lambda_2^* > 0$, поэтому в них достигается условный локальный минимум.

Проверим достаточные условия экстремума второго порядка из методических соображений (в точке A это требуется обязательно).

В точке A ограничение-неравенство не является активным:

$$d^2L(A) = 2\lambda_2^*\, dx_1^2 + \left(2\lambda_2^* - 2\right) dx_2^2 = -2dx_2^2,$$
$$dg_1(A) = dx_1 - dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2$ и $d^2L(A) = -2dx_1^2 < 0$ при $dx_1 \ne 0$. Поэтому в точке A - локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.5).

В точках B и C ограничение-неравенство активно.

В точке B:

$$d^2L(B) = \frac{1}{3}dx_1^2 - \frac{5}{3}dx_2^2,$$
$$dg_1(B) = dx_1 - dx_2 = 0,$$
$$dg_2(B) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 4dx_1 + 2dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(B) \equiv 0$. Требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.5).

В точке C:

$$d^2L(C) = \frac{5}{3}dx_1^2 - \frac{1}{3}dx_2^2,$$
$$dg_1(C) = dx_1 - dx_2 = 0,$$
$$dg_2(C) = -2dx_1 - 4dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(C) \equiv 0$. Требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 3.5).

С другой стороны, ограничение-равенство линейное, а функции "$-f(x)$"$= -x_1 + x_2^2$ и $g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5$ выпуклые, так как $H_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ge 0$, $H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$ (см. п. 3 замечаний 1.4 и разд. 2). Поэтому в точке A достигается условный глобальный максимум (п.3 замечаний 3.6). Так как функция $f(x) = x_1 - x_2^2$ не является выпуклой, то о точках B и C вывод сделать нельзя (п.3 замечаний 3.6). Если бы в задаче исследовалась функция $f(x) = -x_1 + x_2^2$, которая выпукла, то в точке A был бы глобальный минимум (п.3 замечаний 3.6), а о точках B и C вывод сделать нельзя. Из рис. 3.20 следует, что в точке B - условный локальный минимум, а в точке C - условный глобальный минимум.

5. Значения функции в точках экстремума: $f(A) = \frac{5}{4}, f(B) = 1, f(C) = -5$. ■

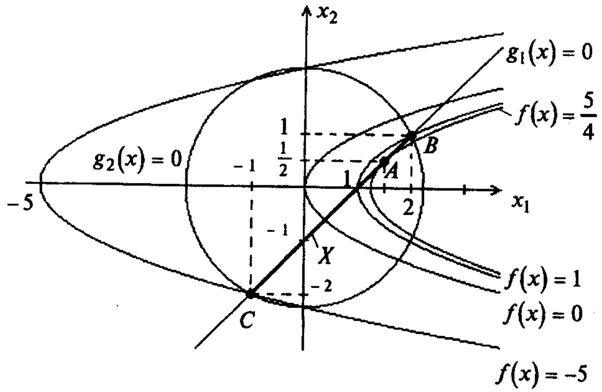

Рис. 3.20

Пример 3.25. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x)=(x_1-\alpha)^2+x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1=0,$$

$$g_2(x)=-x_1 \le 0$$

при $\alpha = 2,-1$.

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left[(x_1-\alpha)^2+x_2^2\right]+\lambda_1\left[x_1^2+x_2^2-1\right]+\lambda_2(-x_1).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-\alpha)+2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0 x_2+2\lambda_1 x_2=0$;

б) $x_1^2+x_2^2-1=0$, $-x_1\le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(-x_1)=0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0=0$. Тогда условие "а" имеет вид

$$2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0,$$

$$2\lambda_1 x_2=0.$$

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия "г".

Если $\lambda_2=0$, то при $\lambda_1=0$ не удовлетворяется утверждение 3.8, а при $\lambda_1\ne 0$ получаем: $x_1=x_2=0$. Тогда не удовлетворяется ограничение-равенство в условии " б".

Если $\lambda_2\ne 0$, то $x_1=0$ и $\lambda_2=0$, т.е. имеется противоречие.

Во втором случае $\lambda_0\ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Условие "а" принимает форму

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=2(x_1-\alpha)+2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0, \quad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1 x_2=0.$$

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия "г":

1) $\lambda_2=0$. Тогда

$$2(x_1-\alpha)+2\lambda_1 x_1=0,$$

$$2x_2+2\lambda_1 x_2=2x_2(1+\lambda_1)=0,$$

$$x_1^2+x_2^2-1=0.$$

Из второго уравнения следует: $\lambda_1=-1$ или $x_2=0$. При $\lambda_1=-1$ первое уравнение несовместно, так как $\alpha\ne 0$. При $x_2=0$ получаем $x_1=\pm 1$. Ограничению "б" удовлетворяет $x_1=1$. Тогда $\lambda_1=\alpha-1$. Получили условно-стационарную точку A: $x_1^*=1, x_2^*=0, \lambda_1^*=\alpha-1, \lambda_2^*=0$;

2) $\lambda_2\ne 0$. Тогда $x_1=0$ и $x_2=\pm 1$. Из условия "а" следует $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2\alpha$. Получили две условно-стационарные точки:

$$B:\ x_1^*=0,\ x_2^*=1,\ \lambda_1^*=-1,\ \lambda_2^*=-2\alpha;$$

$$C:\ x_1^*=0,\ x_2^*=-1,\ \lambda_1^*=-1,\ \lambda_2^*=-2\alpha.$$

При $\alpha>0$ в точках может быть максимум, так как $\lambda_2^*<0$, а при $\alpha<0$ - минимум.

4. Проверим достаточные условия экстремума. Начнем с условий первого порядка. В точке A ограничение-неравенство не является активным, поэтому $l=1<n=2$ и условия не выполняются. В точках B и C ограничение-неравенство активное: $l=2=n$. При $\alpha=2$ получаем $\lambda_2^*=-4<0$, поэтому в точках B и C - условный локальный максимум (строка 2 табл. 3.4). При $\alpha=-1$ получаем $\lambda_2^*=2>0$ и поэтому в точках B и C - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.4).

Проверим достаточные условия экстремума второго порядка.

Исследуем точку A. В ней ограничение-неравенство не является активным:

$$d^2L(A)=\left(2+2\lambda_1^*\right)dx_1^2+\left(2+2\lambda_1^*\right)dx_2^2,$$

$$dg_1(A)=2x_1^*\,dx_1+2x_2^*\,dx_2=2dx_1=0.$$

Отсюда $dx_1=0$ и $d^2L(A)=\left(2+2\lambda_1^*\right)dx_2^2$. При $\alpha=2$ получаем $\lambda_1^*=1$ и $d^2L(A)=4dx_2^2>0$ при $dx_2\ne 0$, следовательно, в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.5). При $\alpha=-1$ получаем $\lambda_1^*=-2$ и $d^2L(A)=-2dx_2^2<0$ при $dx_2\ne 0$. Поэтому в точке A - условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.5). Исследуем точки B и C (их можно было бы и не проверять, так как вывод уже сделан). В них ограничение-неравенство активное. Так как $\lambda_1^*=-1$, то $d^2L(B)=d^2L(C)\equiv 0$. Требуется дополнительное исследование (строки 5 и 6 в табл. 3.5). Так как ограничение-равенство не является линейным, нельзя сделать вывод о глобальном минимуме и максимуме (п.3 замечаний 3.6). Графическое решение свидетельствует о том, что в точках B и C при $\alpha=2$ достигается глобальный условный максимум, а при $\alpha=-1$ - глобальный условный минимум (рис. 3.21).